ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 26 OCTOBRE 1931.

PRÉSIDENCE DE M. Louis de LAUNAY.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** annonce à l'Académie qu'à l'occasion des fêtes de la Toussaint, la prochaine séance hebdomadaire aura lieu le mardi 3 au lieu du lundi 2 novembre.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à M. **William Herbert Hobbs**, professeur de l'Université de Michigan, à Ann Arbor, et à M. **Maurice Kraïtchik**, professeur à l'Institut des Hautes Études de Bruxelles, qui assistent à la séance.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur la réduction de la soude.* Note de M. **P. Villard.**

J'ai précédemment fait connaître que l'hydrogène réduit facilement la soude ainsi que le silicate de sodium, et expliqué par cette réduction la dévitrification du verre dans le travail au chalumeau ([1]). Il pouvait être intéressant d'étudier l'action, sur la soude et la potasse, de quelques métaux ayant un pouvoir réducteur comparable à celui de l'hydrogène.

L'appareil utilisé dans ce but se composait simplement d'un tube en verre extrêmement peu fusible, de 10^{mm} de diamètre intérieur environ, chauffé électriquement sur une quinzaine de centimètres, et sur lequel étaient pratiqués deux ou trois renflements destinés à retenir les produits de la réaction, entraînés par un courant d'azote ou d'hydrogène secs, ou d'un mélange des deux. Des étirages permettaient, à la fin d'une

---

([1]) *Comptes rendus*, 188, 1929, p. 969; 190, 1930, p. 1329.

opération, de fermer, avec un chalumeau à main, l'extrémité de sortie en pointe allongée, puis de séparer par fusion, sans rentrée d'air possible, l'ensemble des ampoules, ou seulement la dernière par exemple. On pouvait ensuite faire le vide, sans crainte d'introduire de l'air, en brisant la pointe dans un caoutchouc à vide relié à une pompe en marche, puis sceller sur un étirage préparé.

Le métal à essayer, en fils, limaille grossière, ou granules était placé dans une feuille de métal roulée, argent, cuivre, parfois fer, dispositif qui formait tube jointif tout en permettant la dilatation.

Dans le cas où cela était possible, le métal était oxydé dans le tube, pour détruire toute trace de matière carbonée, puis réduit par l'hydrogène et refroidi dans l'azote.

Au moment de faire l'expérience un fragment de soude bien déshydratée était introduit, que la feuille de métal roulée empêchait de venir attaquer le verre.

Les résultats ont été les suivants :

Manganèse. Ferro-manganèse. — Le manganèse est le métal de choix pour la réduction des hydrates alcalins.

Avec la soude, dans un courant d'azote, on obtient assez rapidement, dès 600°, un dépôt miroitant de sodium à la suite de la région chauffée, et il suffit d'approcher de 700° pour avoir une vitesse de réaction satisfaisante. Dans ces conditions, une fraction importante du sodium reste mélangée au manganèse, et, en jetant celui-ci dans l'eau après refroidissement, on voit des globules de sodium flotter à la surface et s'enflammer s'ils s'immobilisent sur les bords du vase.

En même temps que le sodium, qui se condense facilement, se dégagent des fumées très difficiles à retenir, et dont une grande partie s'échappe au dehors ; elles sont constituées par de l'hydrure de sodium, formé aux dépens de l'hydrogène de la soude. De là résulte que si, loin de la région où se condense le sodium, on chauffe le tube, aussitôt l'atmosphère intérieure de celui-ci devient opaque pour la lumière du sodium, et cette opacité peut même être observée en dehors du tube, sous la forme d'un cône noir, si l'on chauffe près de la sortie des gaz. On peut recueillir un peu de ces fumées dans un petit ballon indépendant, disposé de manière à pouvoir être scellé pendant que le courant d'azote y pénètre ; chauffant ensuite ce ballon, on le voit devenir opaque pour la lumière d'une flamme sodée ; par refroidissement l'hydrure se reforme.

L'expérience terminée, et les ampoules ayant été vidées de gaz et scellées, on constate qu'en les chauffant le dépôt blanchâtre laissé par les fumées se résout en un miroir de sodium.

On peut, avec le manganèse, remplacer l'azote par de l'hydrogène; l'oxyde de manganèse étant irréductible par ce gaz, au moins jusqu'à

1300° (Moissan), la formation de cet oxyde n'est nullement gênée par la présence de l'hydrogène qui se comporte dès lors comme un gaz inerte, favorisant simplement la production d'hydrure.

Le ferro-manganèse riche peut parfaitement remplacer le manganèse. Avec cet alliage, j'ai obtenu facilement du potassium, et l'on pourrait certainement préparer de même du rubidium et du cæsium.

Chrome. — Ce métal, dont l'oxyde est irréductible par l'hydrogène, devrait se comporter à peu près comme le manganèse; en fait on observe bien la réduction de la soude, mais la réaction ne commence guère avant 750°, et ne devient quelque peu rapide qu'au delà de 800°.

Fer. — En 1896, Sheurer-Kestner ([1]) signalait qu'au-dessus de 200° la soude attaque le fer. En 1925, MM. Hackspill et Grandadam ([2]) ont montré que les hydrates et sels minéraux alcalins sont facilement réduits par le fer dans le vide. Il pouvait être intéressant d'étudier cette réduction dans d'autres conditions. J'ai utilisé des fers divers, et en particulier un fer presque pur, et dont la composition m'était connue. Ce métal, en grosse limaille, a été placé dans une feuille roulée en tôle Armco, oxydé, puis réduit et refroidi dans l'azote.

L'action du fer sur la soude est très comparable à celle du manganèse, et, dans le courant d'azote, on commence à obtenir, dès le rouge le plus sombre, du sodium et de l'hydrure de sodium. La réaction est toutefois beaucoup moins rapide, et il convient de chauffer jusque vers 750°. L'expérience terminée, on constate que le fer s'est oxydé.

Ce réducteur se prête à des observations d'équilibres chimiques d'un certain intérêt. Si, par exemple, on ajoute à l'azote un peu d'hydrogène, on arrive aisément à ce qu'il ne se forme plus que de l'hydrure de sodium. En augmentant le pourcentage de l'hydrogène, on voit disparaître à son tour le dégagement de fumées d'hydrure. On observe cependant encore la présence de vapeur de sodium à la suite de la région chauffée, comme dans la réduction de la soude par l'hydrogène, mais aucune matière réduite ne se dépose. La raison en est qu'en présence d'oxyde de fer chauffé l'hydrogène tend à prendre, pour chaque température, un état hygrométrique défini; un équilibre tend à s'établir, mais le renouvellement continuel du gaz s'oppose à ce qu'il en soit ainsi, et toute trace d'oxyde de fer qui se

---

([1]) *Bull. Soc. chim.*, 3e série, 15, 1896, p. 1250.
([2]) *Comptes rendus*, 180, 1925, p. 70.

forme est réduite aussitôt. L'oxydation du métal ne pouvant ainsi être que transitoire, ce métal devient pratiquement inerte, et, à la fin de l'expérience, on constate en effet qu'il ne s'est pas oxydé. Dans ces conditions, il n'est pas possible d'obtenir un dépôt de sodium, celui-ci étant accompagné de la quantité de vapeur d'eau équivalente.

On peut également produire d'abord, dans l'azote, un dépôt de sodium, puis substituer l'hydrogène à l'azote. Aussitôt on voit le sodium se transformer en soude sous l'action de la vapeur d'eau provenant de la réduction de l'oxyde de fer qui s'était formé. La transformation du sodium en soude est d'ailleurs toujours complète parce qu'une partie de ce métal a été entraînée au dehors à l'état d'hydrure, et que la vapeur d'eau, dont la quantité équivaut au sodium *total*, est ainsi en excès par rapport au métal déposé.

Si l'on rétablit le courant d'azote, on voit reparaître un dépôt de sodium, qui disparaîtra comme précédemment dès qu'arrivera de l'hydrogène, et ces phénomènes peuvent facilement s'observer en un temps assez réduit pour que l'expérience soit réalisable dans un cours.

Ces faits suffisent à expliquer pourquoi le procédé de Gay-Lussac et Thénard donne toujours un mauvais rendement. La présence inévitable d'hydrogène (surtout si la soude ou la potasse est mal déshydratée) s'oppose à l'oxydation du fer et, comme l'a montré Deville, il est nécessaire que la température de l'appareil soit notablement plus basse vers la sortie qu'à l'entrée, afin d'abaisser le degré hygrométrique d'équilibre de l'hydrogène.

Le rendement du procédé de Gay-Lussac et Thénard serait considérablement amélioré par l'emploi d'un courant d'azote, et les résultats précédents montrent qu'une température bien inférieure à celle du rouge blanc, et uniforme, convient alors parfaitement.

Cobalt. Nickel. — On observe facilement, avec ces métaux, la production de vapeur de sodium entre 600° et 750°, donc au-dessous de la température à laquelle commence à se manifester la dissociation de la soude, mais on n'obtient aucun dépôt de sodium, et le cobalt ou le nickel ne s'oxydent pas. Il est vraisemblable qu'en raison de la présence de l'hydrogène provenant de la soude, et de la facilité avec laquelle se réduisent les oxydes de ces deux métaux, on se trouve dans les conditions où le rendement du procédé de Gay-Lussac est nul, ce d'autant plus sûrement que la température est uniforme.

Zinc. — Ce métal est plus oxydable que le fer, et l'on a même, pendant longtemps, considéré son oxyde comme irréductible par l'hydrogène. En

1855 seulement, Rivot, professeur à l'École des Mines, montra qu'en renouvelant rapidement ce gaz la réduction a lieu; c'est une simple question d'équilibre chimique.

Il semblerait qu'un corps aussi oxydable devrait réduire la soude; il n'en est cependant rien, et cela paraît tenir à la très grande volatilité du zinc, laquelle explique également que l'oxyde soit, comme on le sait, réductible par le fer. J'ajouterai que la réduction de l'oxyde de zinc, aisément réalisable par le fer, dès 625°, s'obtient également avec le cobalt avant 700°, et même, vers 750°, avec le nickel, ce qui suffit à faire comprendre que le zinc ne puisse pas déplacer le sodium.

Tungstène. — L'anhydride tungstique est aisément réduit par l'hydrogène; il l'est également par le zinc et la réaction est exothermique [1]. Mais le tungstène ne présente, au-dessous de 2000°, aucune volatilité appréciable, et l'expérience montre qu'il réduit la soude si facilement que l'on peut, comme avec le manganèse, opérer indifféremment dans l'azote ou dans l'hydrogène. Il paraît d'ailleurs y avoir, ici encore, une question d'équilibre, puisque, d'après Ditte, le sodium réduit l'anhydride tungstique.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Nouvelles remarques relatives à l'influence des gaz occlus sur les propriétés mécaniques des produits métallurgiques.* Note de MM. **Léon Guillet, Albert Roux et Jean Cournot.**

MM. Guichard, Claussmann, Billon et Lanthony [2] concluent à l'indépendauce absolue entre la dureté du fer électrolytique et sa teneur en hydrogène; d'après eux, cette dureté est uniquement fonction de la finesse physique de structure.

Dans une Note ultérieure [3], nous avons exposé un point de vue quelque peu différent contre lequel les mêmes auteurs se sont élevés dans une nouvelle Note [4]; leurs essais prouveraient que le fer électrolytique perd *la totalité* de son hydrogène occlus par chauffage de 24 heures à 250°, ce traitement n'abaissant en rien la dureté initiale; il faudrait, pour constater un adoucissement, atteindre des températures plus élevées où l'hydrogène n'intervient plus puisqu'il est déjà totalement éliminé.

---

[1] M. Delépine, *Bull. Soc. chim.*, 3e série, **23**, 1900, p. 675.
[2] *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 623.
[3] *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 787.
[4] *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 1096.

Nous avons exécuté de nouvelles expériences en adoptant le processus opératoire de MM. Guichard, Claussmann, Billon et Lanthony ; nous avons utilisé pour cela notre appareillage à double enceinte à vide, nous mettant ainsi à l'abri de toute erreur expérimentale, ainsi que l'ont prouvé les résultats déjà publiés par deux d'entre nous [1].

Nous sommes partis de cathodes de fer électrolytique industriel courant, de $2^{mm},5$ d'épaisseur ; les éprouvettes pesaient 14^{g} environ ; leur dureté initiale était de 150 Brinell (bille de 2^{mm} de diamètre, sous charge de 120^{kg}) ; voici les résultats que nous avons obtenus par mesures directes et simultanées de dureté et de concentration en hydrogène :

Traitement effectué.	Dureté Brinell.	Pour 100^{g} de métal. Volume gazeux total dégagé.	Hydrogène dégagé.
		cm³	cm³
1. Chauffage de 24 heures à 350°........	150	35,7	6,8
2. Sur éprouvettes traitées comme 1 : chauffage de 3 heures à 600°.......	140	22,1	7,6
3. Sur éprouvettes traitées comme 2 : chauffage de 3 heures à 800°......	93	41,0	10,6

les derniers volumes d'hydrogène, de $7^{cm^3},6$ et $10^{cm^3},6$ sont ceux dégagés pendant les seuls chauffages de 3 heures à 600° et 850° respectivement, abstraction faite de l'hydrogène antérieurement éliminé.

Ces nouveaux résultats sont tout à fait probants et confirment pleinement les conceptions exposées dans notre Note antérieure. On voit que la totalité de l'hydrogène occlus est bien loin d'être dégagée avant que la dureté commence à descendre : nons avons même réussi, pour le chauffage de 24 heures, à atteindre la température de 350° sans que la dureté baisse ; et pourtant nous avons par la suite, aux températures plus élevées, extrait encore un volume d'hydrogène, presque triple de celui déjà obtenu, et il restait encore de ce gaz dans le métal après ces trois chauffages.

Nous répétons donc *qu'il est impossible de certifier* que « la dureté du fer électrolytique est *totalement* indépendante de la teneur en hydrogène ». Reprenant les termes de notre Note, nous croyons plutôt que l'hydrure, s'il existe sous cette forme acidulaire bien visible au microscope, se dissocie au-dessous de 250° ; au-dessus il reste de l'hydrogène en solution qui, bien

---

(1) *Comptes rendus*, **183**, 1926, p. 717.

qu'en faible quantité, élève fortement la dureté, effet courant et bien connu en de telles solutions.

La stabilité de dureté jusqu'à 350° s'expliquerait par une compensation entre, d'une part, la dissociation de l'hydrure en aiguilles et la disparition partielle des tensions d'électrolyse, d'autre part une rentrée en solution de partie de l'hydrogène provenant de la dissociation; il se peut aussi que l'hydrure précipite à nouveau; mais sous un état très divisé; à plus haute température, le dégagement de l'hydrogène hors de la solution solide apporterait sa contribution à l'abaissement de dureté; l'absence de diagramme fer-hydrogène ne permet pas de préciser plus exactement l'évolution du système.

En plus de sa confirmation par nos expériences, cette théorie est en accord avec les aspects micrographiques lesquels sont très caractéristiques et qu'il n'est pas possible, à notre avis, d'écarter bénévolement. Elle est en accord également avec les notions théoriques et expérimentales diverses énumérées dans notre précédente Note et qui n'ont pas été discutées.

Les dépôts électrolytiques dépendent d'un trop grand nombre de facteurs et sont obtenus par des opérations trop complexes pour que des explications simplistes ne risquent pas de laisser place à l'erreur; les occlusions gazeuses en particulier influent trop sur les structures des dépôts pour ne pas justifier l'hypothèse de leur influence partielle sur certaines propriétés finales.

M. **Ch. Fabry** fait hommage à l'Académie d'un volume intitulé Cours de l'École polytechnique. *Cours de Physique*.

M. **P. Pascal**, par l'organe de M. **H. Le Chatelier**, fait hommage à l'Académie du Tome I du *Traité de Chimie minérale*, publié sous sa direction; Secrétaire général Paul Baud.

ÉLECTIONS.

Par l'unanimité des 51 suffrages exprimés, M. **Émile Picard** est présenté à nouveau au choix de l'Institut pour faire partie du *Conseil supérieur de l'Instruction publique*.

PLIS CACHETÉS.

M. **P. L. J. Forest** demande l'ouverture d'un pli cacheté reçu dans la séance du 24 août 1931 et enregistré sous le nº 10476.

Ce pli, ouvert en séance par M. le Président, contient une Note intitulée *Dactylophone Forest* (Machine à parler).

(Renvoi à l'examen de M. A. d'Arsonval.)

CORRESPONDANCE.

Mme **Z. Gruzewska**, sculpteur, fait hommage à l'Académie d'un buste de *A. Dastre* et d'un bas-relief de M. *L. Mangin*.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Naturvetenskapens Matematiska Principer*, av Isaac Newton. Traduction suédoise par C. V. L. Charlier. Tomes II et III.

2° *La théorie des quanta, l'atome de Bohr. La mécanique analytique et les quanta. Les spectres des multiplets*, par Léon Brillouin.

3° Congrès géologique international (XIVe Session, Espagne, 1926). *Bibliographie générale*. Préface de M. César Rubio y Muñoz.

4° Études et observations faites au cours du Congrès géologique international (XIVe Session, Espagne, 1926), publiées sous la direction de M. J. Marcet Riba : Divers fascicules des volumes I-V et *Géologie de la Méditerranée occidentale*, volumes I et II.

5° Inspection générale des Mines et de l'Industrie de l'Indochine. *L'Industrie minérale en Indochine*.

6° *Le climat de l'Indochine et les typhons de la mer de Chine*, par E. Bruzon et P. Carton.

GÉOMÉTRIE. — *Congruences isotropes et surfaces minima.*
Note (¹) de M. P. VINCENSINI.

On sait que l'enveloppée moyenne d'une congruence isotrope quelconque est une surface minima.

Je me propose dans cette Note d'indiquer un nouveau mode de construction des surfaces minima à partir des congruences isotropes.

Incidemment je donnerai une interprétation géométrique de la fonction *caractéristique* de Weingarten relative aux déformations infiniment petites de la sphère.

Prenons comme surface de départ d'une congruence isotrope, sa *surface moyenne* (θ). Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de (θ); X, Y, Z les cosinus directeurs d'un rayon quelconque de la congruence. Toutes ces quantités sont fonctions des deux variables u et v.

Supposons la représentation sphérique de la congruence [sur la sphère (S) de rayon 1] orthogonale, et soit

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

l'élément linéaire de (S).

Comme on sait, (θ) et (S) se correspondent par orthogonalité des éléments linéaires. On a donc

$$\mathrm{S}\, dx\, d\mathrm{X} = 0. \tag{1}$$

On déduit simplement de (1), en désignant par $2d$ le *module* du segment focal porté par le rayon (u, v) de la congruence isotrope envisagée,

$$d = -\frac{\mathrm{S}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}. \tag{2}$$

Le couple (S) (θ) définit une déformation infiniment petite de (S), et l'expression (2) montre que d est la *fonction caractéristique* de cette déformation.

La considération des congruences isotropes donne donc une interprétation géométrique simple aux différentes fonctions caractéristiques relatives aux déformations infiniment petites de la sphère.

(¹) Séance du 19 octobre 1931.

(Δ) *étant une congruence isotrope quelconque, associons à chaque point* M *de la sphère* (S) *le rayon qui a* M *pour image. Les modules des différents segments focaux de* (Δ) *représentent les différentes valeurs d'une fonction caractéristique.*

La surface (Σ) de coordonnées tangentielles [X, Y, Z, φ], φ étant une fonction caractéristique pour (S), est ce qu'on appelle la surface *associée* à (S). Les surfaces associées à une sphère sont, comme il est bien connu, les surfaces minima. Il résulte de là que le plan [X, Y, Z, d] enveloppe une surface minima, et l'on peut énoncer cette proposition qui attache une surface minima à toute congruence isotrope :

Si, par un point fixe O, *on mène une parallèle à chaque rayon d'une congruence isotrope* (Γ), *si l'on porte sur cette parallèle à partir de* O *une longueur* OI *égale au module du segment focal correspondant, et si l'on mène par* I *le plan* (π) *perpendiculaire à* OI; *l'enveloppe des plans* (π) *est une surface minima.*

On se rend facilement compte que la surface minima ainsi obtenue est *distincte* de l'enveloppée moyenne minima de (Γ).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'allure des séries d'itérées au voisinage des frontières de convergence.* Note de M. **Gaston Julia**.

$R(Z)$ est une fraction rationnelle à cercle fondamental $\mathcal{C}[|Z|=1]$, $R_n(Z)$ son itérée d'ordre n, et l'on étudie la série (1) $\mathcal{F}(Z)=\sum_0^\infty a_n R_n(Z)$.

I. *Substitutions régulières de première espèce.* — $[Z|R(Z)]$ a deux points doubles attractifs symétriques α et β, α intérieur à $\mathcal{C}$, β extérieur à $\mathcal{C}$, et $d-1$ points doubles répulsifs sur $\mathcal{C}$. J'appelle Δ_α le domaine où les R_n convergent vers α. 1° Si $\alpha \neq 0$, $\beta \neq \infty$, la série (1) converge dans $\Delta_\alpha(|Z|<1)$ et, hors des pôles, dans $\Delta_\beta(|Z|>1)$, *lorsque* Σa_n *converge* (condition nécessaire et suffisante). Elle converge en tout point double répulsif A, et *uniformément dans tout secteur* Δ, intérieur à $\mathcal{C}$, de pointe A, non tangent à $\mathcal{C}$ en A. Hors de $\mathcal{C}$, les pôles des $R_n(Z)$ s'alignent sur des courbes analytiques émanées de A, dont les tangentes en A n'ont pour rayon limite que la tangente à $\mathcal{C}$. *Dans tout secteur* Δ' extérieur à $\mathcal{C}$, de pointe A, non tangent à $\mathcal{C}$ et ne contenant pas de pôles des R_n, *la convergence de* (1) *est uniforme.* Le théorème classique d'Abel sur les séries entières convergentes en un point du cercle de convergence s'étend aux séries actuelles. *L'extension est assurée*

à tous les antécédents des points doubles répulsifs (partout denses sur $\mathcal{C}$). La série (1) peut diverger aux points des *cycles répulsifs* et en leurs antécédents [exemple $a_n = (-1)^n . n^{-1}$ lorsque R admet (-1) et $(+1)$ pour cycle d'ordre 2]; avec des hypothèses supplémentaires qu'on trouvera dans le Mémoire détaillé, on peut étendre le théorème d'Abel à ces cycles.

2° Si $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, multiplicateurs non nuls, *mêmes conclusions pour* Δ_α *et* Δ_β *sous la condition* $\Sigma a_n s_1^{-n}$ *convergente* (s_1 multiplicateur de β). *Même conclusion, pour* Δ_α *seulement, si* Σa_n *converge.*

3° Si $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, multiplicateurs nuls, il faut examiner les fonctions de Böttcher $F_1(Z)$ de α et $F_2(Z)$ de β, $\{R(Z) = r_p Z^p + \ldots, r_p \neq 0$, autour de α; $R(Z) = r'_p Z_p[1 + \mathrm{Hol}(Z^{-1})]$, $r'_p \neq 0$, autour de $\beta\}$, et le rayon de convergence ρ_1 de la série (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{p^n}$.

Lorsque $\rho_1 > 1$, la série (1) *converge uniformément dans et sur* $\mathcal{C}$. A l'extérieur de $\mathcal{C}$ elle converge dans tout le domaine $(\mathcal{D}')$ que définit $|F_2| > \rho_1^{-1}$. Excepté le cas $R(Z) \equiv r_p Z^p$, le domaine $(\mathcal{D}')$ est une écumoire criblée de trous limités par les courbes analytiques fermées $|F_2| = \rho_1^{-1}$ en infinité dénombrable, qui s'accumulent en tout point de $\mathcal{C}$. Il existe des *secteurs* Δ' *d'ouverture finie, de pointe* A (*point double répulsif*), *intérieurs à* $(\mathcal{D}')$; la série (1) y *converge uniformément et le théorème d'Abel s'étend à ces secteurs et à tous leurs antécédents.*

Lorsque $\rho_1 = 1$, *si* Σa_n *converge, même conclusion qu'en* 1°, *pour* Δ_α *seulement.*

Lorsque $\rho_1 < 1$, la série (1) ne converge que dans une partie de Δ_α définie par $|F_1| < \rho_1$; les courbes fermées frontières $|F_1(Z)| = \rho_1$, en infinité dénombrable si $R(Z) \neq r_p Z^p$, et s'accumulant sur $\mathcal{C}$ sont des coupures de Weierstrass pour $\mathcal{F}(Z)$; toutes les propriétés de la série entière en z, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{p^n}$, sur son cercle de convergence $|z| = \rho_1$ et à l'intérieur s'étendent à la série (1) aux points Z des frontières correspondant aux z précédents par $z = F_1(Z)$, en particulier *le théorème d'Abel s'étend.*

II. *Substitutions régulières de deuxième espèce.* — Sur $\mathcal{C}$ un seul point attractif α et d points répulsifs, dont deux, μ et ν, encadrent α. La frontière de Δ_α est *un ensemble parfait discontinu* E_R, situé sur $\mathcal{C}$, dont le complémentaire sur $\mathcal{C}$ est formé de l'arc $\mu\alpha\nu$ et de tous ses antécédents. Même distribution des pôles de R_n, au voisinage d'un point double répulsif, qu'en I (1°). La *convergence de* Σa_n est ici nécessaire et suffisante. 1° *En* μ, ν *et leurs antécé-*

dents, la convergence de (1) est *uniforme* dans tout secteur de Δ_α, aboutissant en ce point non tangentiellement à $\mathcal{C}$, ne contenant pas de pôles, mais *pouvant contenir l'arc du complémentaire aboutissant au point considéré :* le théorème d'Abel s'étend ici à des *secteurs plus ouverts qu'en* I(1°); 2° aux autres points doubles répulsifs et en leurs antécédents, mêmes conclusions qu'en I(1°).

III. *Substitutions singulières de deuxième espèce.* — Dégénérescence de II. Sur $\mathcal{C}$ un point double α indifférent $[\alpha = R(\alpha), R'(\alpha) = +1; R''(\alpha) \neq 0]$ et $d-1$ points répulsifs. Mêmes phénomènes qu'en II, mais, ν *étant venu coïncider avec* α, on remplacera l'arc $\mu\alpha\nu$ de II par l'arc $\mu\alpha$ et l'on remplacera partout ν par α. La condition de convergence de (1) est encore la *convergence de* Σa_n et les *conclusions de* II *subsistent*.

IV. *Substitutions singulières de première espèce.* — Dégénérescences de I. Sur $\mathcal{C}$, un point double α indifférent, [où sont venus coïncider α, β, et un point répulsif, $\alpha = R(\alpha)$, $R'(\alpha) = +1$, $R''(\alpha) = 0$, $R'''(\alpha) \neq 0$], et $d-2$ points répulsifs. Le domaine Δ_α se compose de $|Z| < 1$ et $|Z| > 1$; sa frontière est le cerle $\mathcal{C}$ tout entier. La condition de convergence de (1) est encore la *convergence de* Σa_n. *Les conclusions de* I (1°) *subsistent intégralement, et dans les mêmes secteurs*, aux points doubles indifférents et répulsifs, et en leurs antécédents (partout denses sur $\mathcal{C}$). Au point α, toutefois, le demi-plan, ne contenant pas $\mathcal{C}$, que détermine la tangente à $\mathcal{C}$, est vide de pôles de R_n, en sorte que les *secteurs extérieurs du type* Δ' où s'étend le théorème d'Abel, *peuvent avoir une ouverture aussi voisine de* π *qu'on voudra* [même conclusion aux antécédents de α].

V. *Fractions rationnelles sans cercle fondamental.* — Les résultats précédents, en totalité ou en partie, peuvent s'étendre à des fractions rationnelles sans cercle fondamental sous certaines hypothèses, par exemple l'existence d'une tangente à la frontière au point double considéré (réalité nécessaire du multiplicateur), destinées à assurer l'existence de secteurs tels que Δ ou Δ' dont les deux courbes limites aient, au sommet, des tangentes déterminées.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Détermination des intégrales des systèmes d'équations* linéaires *aux dérivées partielles du type elliptique.* Note de **M. MAURICE GEVREY.**

Nous avons exposé [1] les procédés de résolution des problèmes aux limites *intérieurs* relatifs à l'équation linéaire du type elliptique à m variables. La méthode générale que nous avons donnée s'applique aussi au système de n équations de la forme

$$(1) \qquad \sum_{ij} a_{ij}^k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{hi} b_{hi}^k \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \sum_h c_h^k u_h = f_k,$$

avec $i, j = 1, \ldots, m$ et $k, h = 1, \ldots, n$, les coefficients étant fonctions du point $P(x_i)$. Les dérivées secondes de u_k ne figurent que dans la $k^{\text{ième}}$ équation et, pour chaque valeur de k, la forme $\Sigma a_{ij}^k \alpha_i \alpha_j$ est définie positive et de discriminant égal à *un*. Les n fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_n$ sont astreintes, sur la frontière S d'un domaine borné D, à des conditions aux limites linéaires $H_k \frac{\partial u_k}{\partial N} + K_k u_k = L_k$ [N *conormale* intérieure à S relative à l'équation (1)]. Enfin on suppose les coefficients de (1) et le champ des normales à S *continus à la Hölder* avec l'exposant $\alpha < 1$.

Soit à résoudre, par exemple, le *problème de Dirichlet* (tous les H_k nuls). A chaque équation (1) correspond une *fonction auxiliaire* V_k des deux points P et Π, jouant le rôle de *quasi-fonction de Green* et formée exactement comme dans le cas d'une seule équation. De même u_k sera la somme d'une intégrale nulle sur S et d'une fonction χ_k égale à u_k sur S :

$$u_k(P) = q \int_D V_k \varphi_k(\Pi) \, d\omega_\Pi + \chi_k(P) \quad \text{avec} \quad \chi_k(P) = q \int_S \frac{\partial V_k}{\partial N_\Pi} u_k(\Pi) S_\Pi,$$

(en posant $q = [(m-2)\sigma_m]^{-1}$, σ_m aire de la sphère unitaire). Si l'on désigne par $F_k^h(u_h)$ l'ensemble des termes de (1) contenant u_h et ses dérivées, les φ_k

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 9, 1930, p. 1 à 80. Voir aussi *Comptes rendus*, 188, 1929, p. 1652, où le schéma de la méthode est complètement indiqué et où les notations sont les mêmes qu'ici, sauf le changement de k en j dans les coefficients des dérivées secondes. Dans cette Note, page 1653, ligne 3 en remontant, il faut lire a^{ik} au lieu de a_{ik}, et page 1655, ligne 11, $C_i Z_i$ au lieu de $C_i L_i$.

sont solutions du système d'équations de Fredholm :

$$\varphi_k(\mathrm{P}) - q\int_{\mathrm{D}} \sum_h \mathrm{F}_k^h(\mathrm{V}_h)\,\varphi_h(\Pi)\,d\omega_\Pi = \sum_h \mathrm{F}^h(\chi_h) - f_k = g_k.$$

Or ce système se ramène *à une seule équation*

$$\varphi(\mathrm{P}) - \lambda\int_{\Sigma\mathrm{D}} \mathfrak{N}_\mathrm{P}^\Pi(\Pi)\,d\omega_\Pi = g(\mathrm{P}) \quad \text{avec} \quad \lambda = 1,$$

en supposant que $\Sigma\mathrm{D}$ soit un domaine constitué par n domaines $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_n$ identiques à D et que, si P_k et Π_k sont les points correspondant à P et Π dans D_k, on ait

$$\varphi(\mathrm{P}_k) = \varphi_k(\mathrm{P}), \qquad g(\mathrm{P}_k) = g_k(\mathrm{P}), \qquad \mathfrak{N}_{\mathrm{P}_k}^{\Pi_h} = q\,\mathrm{F}_k^h(\mathrm{V}_h).$$

En posant $\varphi = s^{\alpha-2}\bar{\varphi}$ (1), on obtient une équation en $\bar{\varphi}$ dont le noyau est de la forme $\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{1-\alpha}(\mathrm{P}\Pi)^{\alpha-m}\mathrm{K}$, où K est une fonction de P et Π continue dans $\Sigma\mathrm{D}$ (sauf peut-être pour $\mathrm{P}\Pi = 0$) et bornée dans $\Sigma(\mathrm{D}+\mathrm{S})$; des itérations font disparaître $(\mathrm{P}\Pi)^{\alpha-m}$ et donnent un noyau se prêtant aisément aux formules de Fredholm. On trouve ainsi

$$\varphi(\mathrm{P}) = g(\mathrm{P}) + \int_{\Sigma\mathrm{D}} \Phi_\mathrm{P}^\Pi\, g(\Pi)\,d\omega_\Pi,$$

Φ_P^Π étant la résolvante du noyau $\mathfrak{N}_\mathrm{P}^\Pi$ pour $\lambda = 1$, en supposant que cette valeur n'annule pas le déterminant $\mathrm{D}(\lambda)$ de Fredholm (2). La méthode consiste donc à former V_k à l'aide de la fonction s, comme nous l'avons expliqué, et à calculer le *noyau résolvant* de $\mathfrak{N}$.

Lorsque, dans la condition aux limites, H_k n'est pas nul, nous avons montré comment on est ramené au *problème de Neumann*, de sorte que le

(1) s est une fonction de P nulle sur S (*loc. cit.*), ayant ici une détermination pour chaque domaine D_k; σ est sa valeur en Π.

(2) En portant les valeurs des φ_k dans l'expression des u_k on peut voir u_k au moyen d'intégrales où figurent les produits des données et des seconds membres f_k par des fonctions indépendantes de ces quantités; mais il ne faut voir là qu'une *façon d'écrire le résultat*. Dans le cas d'*une seule équation* linéaire $\mathrm{F}(u) = f$, ce procédé introduit la *fonction de Green* $\mathrm{G}_\mathrm{P}^\Pi$, qui est aussi solution, relativement à Π, de l'équation adjointe *quand celle-ci existe*. Dans ce cas u peut s'obtenir directement par la formule de Green, ce qui prouve l'*unicité de la solution*; mais ce dernier résultat subsiste même si les coefficients sont simplement continus à la Hölder. En effet, dans le

problème le plus général se ramène à celui où l'on donne sur S les valeurs de $u_1, \ldots, u_p$ et des dérivées conormales de $u_{p+1}, \ldots, u_n$. *Pour* $k > p$, les fonctions V_k sont formées à l'aide du *point-image*, comme nous l'avons expliqué pour une seule équation, et u_k conserve la même forme, mais avec $\chi_k = -q\int_S V_k\left(\frac{\partial u_k}{\partial N}\right)_\Pi dS_\Pi$. Dans le système d'équations intégrales en φ_k on posera $\varphi_k = s^{\alpha-2}\bar{\varphi}_k$ pour $k \leq p$ et $\varphi_k = s^{\alpha-1}\bar{\varphi}_k$ pour $k > p$: le système d'équations en $\bar{\varphi}_k$ ainsi obtenu se ramène encore à une seule.

L'étude des *cas singuliers* $[\mathcal{D}(1) = 0]$ se fait comme dans le cas d'une seule équation.

La théorie des équations (1) contient les éléments nécessaires pour appliquer la méthode des *approximations successives* de M. Picard au cas où les u_k et leurs dérivées premières, au lieu de s'introduire linéairement, figurent dans des fonctions lipschitziennes par rapport à ces termes.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la définition riemannienne de l'intégrale de Lebesgue.* Note [1] de M. **Arnaud Denjoy**, présentée par M. Hadamard.

J'ai indiqué [2] diverses manières de déduire des sommes de Riemann l'intégrale de Lebesgue d'une fonction sommable. L'une de ces méthodes, que M. Kempisty a retrouvée et étudiée [3], repose sur les notions suivantes.

Appelons minimum (maximum) de f sur l'intervalle ab ce qui advient quand on néglige les ensembles d'épaisseur inférieure à α $(0 < \alpha < 1)$, ou

---

cas contraire, on aurait une solution v de $F(v) = 0$ *nulle sur* S. Or on peut calculer des fonctions dérivables (une ou plusieurs fois) dont la différence avec les coefficients de F soit $< \eta$. Soit F^* ce que devient F avec ces nouveaux coefficients : $F = 0$ *a alors une adjointe*, et v, solution de l'équation $F^*(v) = F - F^*$, satisfait à la formule de Green envisagée plus haut, où f a été remplacé par $F - F^*$ et S par une surface S' voisine de S (et frontière de D') sur laquelle on a $|v| < \varepsilon$. On peut choisir S' et η de façon que les intégrales de la formule soient aussi petites qu'on le voudra. D'où résulte $v = 0$ en tout point de D', donc de D. Cette démonstration doit remplacer celle de la page 71 de notre Mémoire, incorrectement présentée.

(1) Séance du 19 octobre 1931.

(2) *Comptes rendus*, **169**, 1919, p. 219-220.

(3) *Comptes rendus*, **180**, 1925, p. 812-815 et 1011-1014; **185**, 1927, p. 749-751.

plus brièvement *minimum* (*maximum*) *d'épaisseur* α *de* f *sur* ab, respectivement la borne supérieure $m(f, a, b, \alpha)$ du minimum de f, et la borne inférieure $M(f, a, b, \alpha)$ du maximum de f, sur les ensembles d'épaisseur supérieure à $1-\alpha$ sur ab.

Soit $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ une subdivision quelconque de ab, avec $0 < x_i - x_{i-1} \leqq \omega$ (ω indépendant de i). Posons

$$s(f, a, b, \alpha) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - x_{i-1}) m(f, x_{i-1}, x_i, \alpha),$$

$$S(f, a, b, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - x_{i-1}) M(f, x_{i-1}, x_i, \beta).$$

Convenons de dire que f est *intégrable* (A) sur ab, et que $I_A(f, a, b) = I$, si, pour un choix de deux nombres α et β ($\alpha + \beta < 1$), les deux sommes $s(f, a, b, \alpha)$ et $S(f, a, b, \beta)$ tendent vers I quand ω tend vers zéro, indépendamment du choix des x_i.

Dans la Note rappelée plus haut, j'ai énoncé cette proposition :

Toute fonction sommable sur ab est intégrable (A) *et*

$$I_A(f, a, b) = \int_a^b f\,dx.$$

On voit en effet que $\int_a^b |f|\,dx$ peut être borné inférieurement proportionnellement à $|S|$ et à $|s|$. Il suffit d'appliquer ceci à une fonction φ, telle que $f = g + \varphi$, g étant continu et $\int_a^b |\varphi|\,dx < \varepsilon$ (ε donné positif).

J'avais énoncé comme probable la réciproque :

Toute fonction intégrable (A) *sur ab est sommable*. En voici une démonstration.

Tout d'abord, pour $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, soit $\lambda(f, c, d, \gamma)$ défini quels que soient c et d sur le segment ab, $(c < d)$ et vérifiant

$$m(f, c, d, \gamma) \leqq \lambda \leqq M(f, c, d, \gamma).$$

Formons

$$\sigma(f, a, b, \gamma) = \sum_1^n (x_i - x_{i-1}) \lambda(f, x_{i-1}, x_i, \gamma).$$

Supposons que σ tende vers une limite finie unique $J(f, a, b)$ quand ω

tend vers zéro. Alors $J(f, a, x) = F(x)$ existe si $a < x \leqq b$;

$$\sum | F(x_i) - F(x_{i-1}) - \sigma(x_{i-1}, x_i, \gamma) |$$

est borné indépendamment des x_i et tend vers zéro avec ω; et $F(x)$ est continu en tout point où f est approximativement continu.

Je dis que $F(x)$ *possède f pour dérivée sur une épaisseur pleine*.

Soient $\varepsilon > 0$; $E(\varepsilon)$ l'ensemble des points ξ tels que sur tout intervalle de longueur au plus égale à ε et contenant ξ, l'épaisseur moyenne de l'ensemble $| f(x) - f(\xi) | < \varepsilon$ soit supérieure à $1 - \gamma$. Dans $E(\varepsilon)$, soient $P(\varepsilon)$ un ensemble parfait épais; $g_1, g_2, \ldots$ ses contigus; g'_n un intervalle contenu dans g_n. On voit que la somme des variations de F sur un nombre quelconque de g'_n choisis indifféremment est bornée. D'autre part, la variation simple $H(x)$ de F sur $P(\varepsilon)$ entre a et x est l'intégrale (A) de la fonction (bornée) égale à f sur P et à 0 ailleurs. D'où la conclusion.

Ceci s'applique à $F(x) = I_A(f, a, x)$ si f est intégrable (A). Je dis que dans ce cas, F *est à variation totale bornée sur ab*.

Sinon on trouverait une suite de subdivisions $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots, \xi_n, \eta_n, \xi_{n+1}$, vérifiant ces conditions :

1° $\xi_1 = a$ et $\xi_n < c \leqq \xi_{n+1}$, ou $\xi_1 \leqq c < \xi_2$, $\xi_{n+1} = b$, c étant le milieu de ab.

2° Les $u_k = f(\eta_k) - f(\xi_k)$ sont tous de même signe, par exemple, $u_k > 0$, et alors $-v_k = F(\xi_{k+1}) - F(\eta_k) < 0$.

3° $\sum_1^n (u_k + v_k)$ croît indéfiniment avec le rang p (et le nombre n des points) de la subdivision.

Comme $\Sigma u_k - \Sigma v_k = F(\xi_{n+1}) - F(\xi_1)$ est borné indépendamment de p, le rapport de Σu_k à Σv_k tend vers 1.

i_k étant $\xi_k \eta_k$ et j_k étant $\eta_k \xi_{k+1}$, posons

$$u_k = i_k m(f, i_k, \alpha) + \varepsilon_k, \qquad -v_k = j_k m(f, j_k, \beta) + \theta_k.$$

$\Sigma | \varepsilon_k | + \Sigma | \theta_k |$ est borné indépendamment de p.

Associons i_k et j_k. Déplaçons η_k dans j_k jusqu'en η'_k. i_k devient $i'_k = h_k i_k$ et j_k devient $j'_k = h'_k j_k$.

Posons

$$h_k = \frac{1-\beta}{\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad 1 > h'_k > \frac{1-\alpha}{\beta} \qquad \text{si } (1-\alpha) i_k < \alpha j_k,$$

$$1 < h_k < \frac{1-\beta}{\alpha} \qquad \text{et} \qquad h'_k = \frac{1-\alpha}{\beta} \qquad \text{si } (1-\alpha) i_k > \alpha j_k.$$

On en conclut que

$$m(i_k, \alpha) \leqq M(i'_k, \beta) \quad \text{et} \quad -m(j_k, \alpha) \leqq M(j'_k, \beta).$$

Soient

$$u'_k = i'_k M(i'_k, \beta) > h_k(u_k - \varepsilon_k) \quad \text{et} \quad -v'_k = j'_k M(j'_k, \beta) > h'_k(-v_k - \theta_k).$$

On voit que $\Sigma u'_k$, $\Sigma v'_k$ sont $+\infty$ avec p, sans que leur rapport tende vers 1, quoique $\Sigma(u'_k - v'_k)$ doive être borné. Il y a contradiction.

$F(x)$ est à variation bornée. Donc f qui est presque partout sa dérivée est sommable. *A priori*, pour f non sommable, $\Sigma(x_i - x_{i-1})|\lambda(f, x_{i-1}, x_i, \gamma)|$ est non borné.

MÉCANIQUE. — *Sur les conditions d'application du principe de relativité.* Note de M. **J. Le Roux**.

Les propriétés du groupe des mouvements relatifs sont susceptibles d'une généralisation qui présente un grand intérêt pour la discussion du principe de relativité.

D'après Einstein, le principe de relativité exprime que les lois de la physique doivent être valables quels que soient les systèmes de référence, fixes ou mobiles auxquels on rapporte les phénomènes.

On doit estimer, en effet, que les lois ne sont connues, dans toute leur généralité et avec leur véritable portée, que si l'on peut les exprimer sous une forme invariante par rapport aux systèmes de référence.

Or le changement de système de référence est ordinairement représenté analytiquement par des transformations de variables dont l'ensemble constitue un groupe continu.

Considérons, par exemple, une catégorie de phénomènes dont la représentation analytique par rapport à un système de référence donné, S_x, soit définie par la considération de n variables x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Pour un autre système de même nature, S_y, nous aurions à considérer n autres variables y_i. Si l'on admet que la liaison entre les deux systèmes de référence dépende de r paramètres a_k, il existera entre les x et les y des relations de la forme

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_r),$$

définissant un groupe à n variables et à r paramètres.

La variation des quantités x ou y indique une variation d'aspect du phénomène par rapport au système de référence correspondant. La constance des paramètres a indique une liaison statique permanente entre les deux systèmes de référence, et leur variation indique une mobilité relative de l'un par rapport à l'autre.

S'il y a à la fois variation d'apparence du phénomène et mobilité relative des systèmes de référence, on aura donc, entre les différentielles premières, des relations de la forme suivante :

$$(2) \qquad dy_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x} dx + \sum \frac{\partial f_i}{\partial a} da.$$

La réunion des deux systèmes (1) et (2) définit un nouvel ensemble de transformations, remplaçant les variables x, dx par de nouvelles variables y, dy et dépendant des paramètres a, da.

Cet ensemble constitue un nouveau groupe à $2n$ variables et à $2r$ paramètres.

L'extension ainsi définie présente une évidente analogie avec le prolongement considéré dans la théorie de Lie. Elle en diffère par le fait que les différentielles, dans la théorie de Lie, sont prises en regardant les paramètres comme des constantes, tandis que, dans notre mode d'extension, nous faisons varier à la fois les variables x et les paramètres a. Nous appellerons le premier *prolongement statique* et le second *prolongement cinématique*.

Les expressions différentielles susceptibles d'exprimer une loi physique, compatible avec le principe de relativité, doivent présenter le caractère d'invariance par rapport au groupe cinématique étendu, s'il y a lieu, aux différentielles d'ordre supérieur.

L'élément linéaire ds^2, qui s'introduit dans l'étude des groupes afférents aux divers systèmes géométriques, est un invariant différentiel du groupe statique, mais non du groupe cinématique. Il ne satisfait pas aux conditions précédentes.

Le groupe des mouvements relatifs se réduit au prolongement cinématique du groupe des déplacements euclidiens. L'expression invariante de la loi de gravitation que j'en ai déduite est *actuellement* la seule formulée qui soit compatible avec le principe de relativité.

La formation des transformations infinitésimales du groupe cinématique est particulièrement simple. Dans ce qui suit, pour la simplicité des notations, nous représenterons par des lettres accentuées soit les différentielles,

soit des dérivées prises par rapport à une variable quelconque, non désignée.

A toute transformation du groupe initial

$$X_h(f) = \sum \xi_{hi} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

correspondent, dans le prolongement cinématique du premier ordre, les deux transformations suivantes :

$$(3) \qquad \overline{X}_h(f) = \sum \left(\xi_{hi} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \xi'_{hi} \frac{\partial f}{\partial x'_i} \right),$$

$$(4) \qquad D_h(f) = \sum \xi_{hi} \frac{\partial f}{\partial x'_i}.$$

Les transformations du type (3) sont communes aux deux modes de prolongement. Celles du type (4) caractérisent spécialement le groupe cinématique.

Aux relations fondamentales du groupe initial

$$(X_h X_k) = \Sigma c_{hks} X_s$$

correspondent les suivantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} (\overline{X}_h \overline{X}_k) = \Sigma c_{hks} X_s, \\ (\overline{X}_h D_k) = \Sigma c_{hks} D_s, \\ (D_h D_k) = 0. \end{cases}$$

Les transformations D_h, relatives au groupe euclidien, jouent un rôle considérable dans l'étude des théorèmes généraux de la Mécanique.

HYDRODYNAMIQUE. — *Problème touchant des tourbillons cylindriques de section finie.* Note [1] de M. **J. Rossignol**.

Dans un fluide incompressible et non visqueux on considère deux cylindres tourbillonnaires verticaux Σ_1 et Σ_2 à l'intérieur desquels le tourbillon, vertical, a respectivement pour valeurs ζ_1 et ζ_2. Admettant l'existence d'un régime permanent consistant en une rotation uniforme de vitesse angulaire ω de l'ensemble des deux cylindres autour d'un axe vertical fixe convenablement choisi, Σ_1 et Σ_2 conservant dans le mouvement relatif une configuration invariable, nous chercherons cette configuration

---

[1] Séance du 19 octobre 1931.

d'équilibre relatif. Il suffit évidemment de déterminer les contours S_1 et S_2 des domaines tourbillonnaires T_1 et T_2 dans un plan horizontal H [1].

Soient dans un tel plan G_1 et G_2 les centres de gravité tourbillonnaires de T_1 et de T_2; si la distance G_1G_2 est grande par rapport à la plus grande dimension transversale de P_1 et de P_2, les contours S_1 et S_2 seront quasi circulaires. Mettons sous la forme $\pi R_1^2\zeta_1$ l'intensité tourbillonnaire invariable rapportée à l'unité de longueur du cylindre Σ_1; $\pi R_2^2\zeta_2$ sera l'intensité relative à Σ_2. Soit O la trace de l'axe de rotation des cylindres dans le plan horizontal considéré; rapportons le problème plan aux axes mobiles rectangulaires Oxy, Ox passant par G_1 et G_2, et posons $\overline{OG_1}=l_1$, $\overline{OG_2}=l_2$, $\overline{G_1G_2}=l_2-l_1=L$. La disposition de G_1 et de G_2 est choisie de telle sorte que L soit positif. Comme O est manifestement le centre de gravité tourbillonnaire des domaines T_1 et T_2, on a $\zeta_1R_1^2l_1+\zeta_2R_2^2l_2=0$.

Pour déterminer le contour S_1 on considérera la circonférence S_{01} de centre G_1 et de rayon R_1 et l'on prendra pour inconnue la fonction

$$\varkappa_1(\theta_1)=\overline{M_{01}M_1}$$

donnant la distance des points M_{01} et M_1 d'intersection de S_{01} et de S_1 avec un rayon vecteur $G_1M_{01}M_1$ faisant l'angle polaire θ_1 avec G_1x. Notations analogues pour S_2. Mais il est clair que si nous voulons que le fluide soit au repos à l'infini, il faut imaginer une distribution tourbillonnaire cylindrique Σ_0 de tourbillon vertical et uniforme ζ_0, dont l'intensité par unité de longueur soit égale à $-\pi R_1^2\zeta_1-\pi R_2^2\zeta_2=-I$, et dont le centre de gravité soit O; cette distribution tournera comme T_1 et T_2 avec la vitesse angulaire ω autour de O. Nous la supposerons constituée par une couche tourbillonnaire comprise entre la surface S_{00} d'un cylindre circulaire ayant pour axe l'axe de rotation du système et pour rayon R_0, et une surface S_0 également cylindrique dont la section par le plan H sera déterminée par la fonction $\varkappa_0(\theta_0)=\overline{M_{00}M_0}$ donnant la distance des points M_{00} et M_0 d'intersection de S_{00} et de S_0 avec un rayon vecteur issu de O et faisant avec Ox l'angle θ_0. On désignera par T_0 le domaine tourbillonnaire délimité par les contours S_{00} et S_0 dans le plan H. On supposera R_0 choisi assez grand pour que $\frac{\varkappa_0}{R_0}$ soit négligeable dans les calculs devant l'unité. On aura alors la condition

$$(1)\qquad \zeta_0R_0\int_0^{2\pi}\varkappa_0\,d\theta_0=-I.$$

---

[1], L. Lichtenstein (*Math Zeitschrift*, **12**, 1922, p. 201-210) a donné d'importants aperçus concernant ce genre de questions.

Ceci posé, il est clair que les contours S_1 et S_2 seront des lignes de courant dans le mouvement relatif des tourbillons. On devra donc avoir en un point $M_1(x, y)$ de S_1, avec des notations évidentes,

$$(2)\quad \frac{1}{\pi}\int_{T_1}\zeta_1 \operatorname{Log}\frac{1}{r_{11}}\,d\sigma_1+\frac{1}{\pi}\int_{T_2}\zeta_2 \operatorname{Log}\frac{1}{r_{21}}\,d\sigma_2+\frac{1}{\pi}\int_{T_0}\zeta_0 \operatorname{Log}\frac{1}{r_{01}}\,d\sigma_0+\omega\frac{x^2+y^2}{2}=C_1,$$

et une relation de même nature pour tout point M_2 de S_2.

La conservation de l'intensité tourbillonnaire totale de T_1 donne

$$(3)\quad \int_0^{2\pi}\varkappa_1\left(1+\frac{\varkappa_1}{2R_1}\right)d\theta_1=0.$$

D'autre part, G_1 étant le centre de gravité tourbillonnaire de P_1, on a

$$(4)\quad \int_0^{2\pi}\varkappa_1\cos\theta_1\left(1+\frac{\varkappa_1}{R_1}+\frac{\varkappa_1^2}{3R_1^2}\right)d\theta_1=0,\qquad \int_0^{2\pi}\varkappa_1\sin\theta_1\left(1+\frac{\varkappa_1}{R_1}+\frac{\varkappa_1^2}{3R_1^2}\right)d\theta_1=0.$$

Relations analogues pour T_2.

La deuxième relation (4) sera satisfaite d'elle-même si nous admettons que Ox est un axe de symétrie pour les distributions T_0, T_1 et T_2. En particulier, pour T_0, on aura la condition

$$(5)\quad \int_0^{2\pi}\varkappa_0\cos\theta_0\,d\theta_0=0.$$

L'équation (2) et l'équation analogue relative à T_2 sont alors développées en regardant $\frac{l_1}{R_1}$, $\frac{l_2}{R_2}$, $\frac{R_0}{L}$, $\frac{\varkappa_1}{R_1}$ et $\frac{\varkappa_2}{R_2}$ comme des quantités très petites.

Tenant compte des conditions (3), (4) et (5), on obtient les équations

$$(6)\quad \psi_1^{(1)}+\psi_1^{(2)}+\ldots+\mu_1 R_1\left[\cos\theta_1\left(1+\frac{\varkappa_1}{R_1}\right)-1\right]+\omega\varkappa_1 R_1\left(1+\frac{\varkappa_1}{2R_1}\right)$$
$$+\frac{\zeta_2R_2^2}{2}\left(\frac{R_1}{L}\right)^2\left[\left(1+\frac{\varkappa_1}{R_1}\right)^2\cos2\theta_1-1\right]+\frac{\zeta_2R_2^2}{3}\left(\frac{R_1}{L}\right)^3\left[\left(1+\frac{\varkappa_1}{R_1}\right)^3\cos3\theta_1-1\right]+\ldots$$
$$+\frac{\zeta_2R_2^3}{2\pi L^2}\int_0^{2\pi}\varkappa_2\cos2\theta_2\left[1+\frac{3\varkappa_2}{2R_2}+\frac{\varkappa_2^2}{R_2^2}+\frac{\varkappa_2^3}{4R_2^3}\right]d\theta_2$$
$$+\frac{\zeta_2R_2^3}{\pi L^3}(R_1+\varkappa_1)\cos\theta_1\int_0^{2\pi}\varkappa_2\cos2\theta_2\left[1+\frac{3\varkappa_2}{2R_2}+\frac{\varkappa_2^2}{R_2^2}+\frac{\varkappa_2^3}{4R_2^3}\right]d\theta_2$$
$$-\frac{\zeta_2}{3\pi}\frac{R_2^4}{L^3}\int_0^{2\pi}\varkappa_2\cos3\theta_2\left[1+2\frac{\varkappa_3}{R_2}+2\frac{\varkappa_2^2}{R_2^2}+\frac{\varkappa_2^3}{R_2^3}+\frac{\varkappa_2^4}{5R_2^4}\right]d\theta_2+\ldots$$
$$+\frac{\zeta_0R_1}{2\pi}\frac{l_1}{R_0}\left\{2\left[\left(1+\frac{\varkappa_1}{R_1}\right)\cos\theta_1-1\right]+\frac{R_1}{l_1}\left[\left(1+\frac{\varkappa_1}{R_1}\right)^2\cos2\theta_1-1\right]\right\}\int_0^{2\pi}\varkappa_0\cos2\theta_0\,d\theta_0+\ldots=$$

et une équation analogue où les indices 1 et 2 seront échangés et L changé en $-L$; k_1 et k_2 sont des constantes, d'ailleurs très petites par rapport à 1. Les premiers termes non écrits dans ces équations sont de l'ordre de $\zeta_2 R_2^2\left(\frac{R_1}{L}\right)^4$ et $\zeta_1 R_1^2\left(\frac{R_2}{L}\right)^4$ pour les deux premières séries de termes — non comprises les séries $\psi_1^{(1)}+\psi_1^{(2)}+\ldots$ et $\psi_2^{(1)}+\psi_2^{(2)}+\ldots$ —, et $\frac{IR_1}{R^0}\left(\frac{l_1}{R_0}\right)^2$ ou $\frac{IR_2}{R_0}\left(\frac{l_2}{R_0}\right)^2$ pour la dernière. En outre on a

$$(7)\qquad \mu_1=\omega l_1+\frac{\zeta_2 R_2^2}{L},\qquad \mu_2=\omega l_2-\frac{\zeta_1 R_1^2}{L},$$

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
&\psi_1^{(1)}=-\zeta_1 x_1 R_1-\frac{\zeta_1 R_1}{\pi}\int_0^{2\pi} x'_1\,K(\theta'_1,\theta_1)\,d\theta'_1\qquad [x'_1 \text{ étant mis pour } x_1(\theta'_1)],\\
&\psi_1^{(2)}=-\frac{\zeta_1}{4\pi}\int_0^{2\pi} x_1^2\,d\theta_1-\frac{\zeta_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x_1'^2\,K(\theta'_1,\theta_1)\,d\theta'_1,\\
&\psi_1^{(3)}=\frac{\zeta_1 x_1}{4\pi R_1}\int_0^{2\pi} x_1^2\,d\theta_1-\frac{\zeta_1}{24\pi R_1}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta'_1}{\sin^2\frac{\theta'_1-\theta_1}{2}}\\
&\qquad\times\left\{x_1'^3[2-\cos(\theta'_1-\theta_1)]-3\cos(\theta'_1-\theta_1)\,x_1'^2 x_1\right.\\
&\qquad\qquad\left.+3\cos(\theta'_1-\theta_1)\,x'_1 x_1^2-x_1^3\cos^2(\theta'_1-\theta_1)\right\};\\
&\text{et expressions analogues pour } \psi_2^{(1)},\ \psi_2^{(2)},\ \psi_3^{(3)}.
\end{aligned}\right.$$

$K(\theta',\theta)$ est défini par

$$(9)\qquad K(\theta',\theta)=\log 2\sin\left|\frac{\theta'-\theta}{2}\right|=-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos p\theta\cos p\theta'+\sin p\theta\sin p\theta'}{p}.$$

Les équations (6) sont résolubles par approximations successives.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Procédé permettant d'assurer la correspondance des débits d'air et d'essence dans les carburateurs.* Note [1] de M. **Henri Quillery**, transmise par M. André Blondel.

Le dispositif nouveau qu'on va décrire a pour but :

1° De délivrer, au moyen d'un seul gicleur, des débits pondéraux de carburant q et d'air Q qui soient dans le rapport $\frac{1}{15}$ pour les ouvertures réduites ($\alpha=0$ à $\alpha=75°$) et dans le rapport $\frac{1}{12}$ pour l'ouverture totale

(1) Séance du 19 octobre 1931.

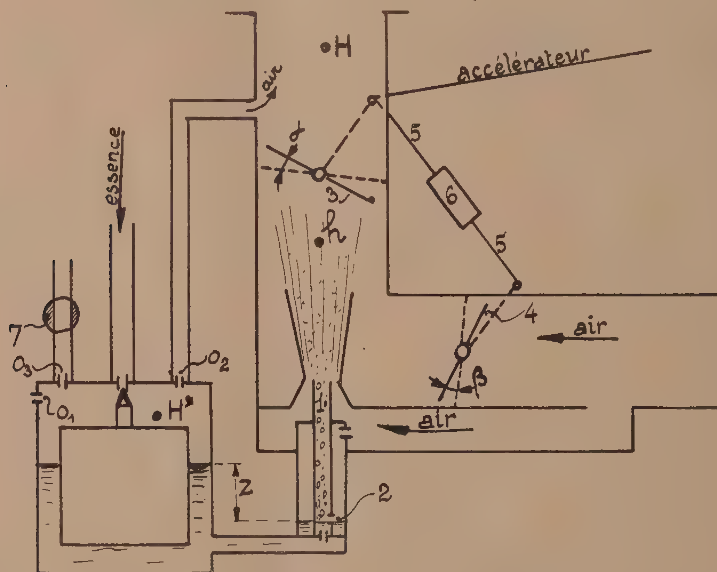
($\alpha = 80^\circ$), et d'une façon générale des débits tels que

$$(1) \qquad \frac{q}{Q} = \varphi(\alpha),$$

où α est l'angle d'ouverture du papillon des gaz.

2° De maintenir ces rapports, quelle que soit la densité de l'air atmosphérique.

3° De modifier, pour le départ du moteur, la fonction $\varphi(\alpha)$ de telle façon que le rapport $\frac{q}{Q}$ passe de $\frac{1}{15}$ à $\frac{8}{15}$ ou $\frac{10}{15}$ lorsque α est voisin de zéro, tout en variant le moins possible pour les ouvertures plus grandes.



1, gicleur à dénoyage; 2, trous de dénoyage; 3, papillon des gaz de course angulaire α de 0° à 80°; 4, papillon d'air faisant varier la section S; 5, bielle d'accouplement des deux papillons; 6, organe de longueur variable; 7, robinet fermé en marche normale, ouvert au départ; O_1, O_2, orifices mettant la cuve à la dépression H'; H, H', h, dépressions régnant aux lieux indiqués; Z, hauteur des orifices 2 au-dessous du niveau constant; a, b, paramètres; S, section variable d'entrée d'air au carburateur.

1° Déterminons la loi nécessaire de variation de la section variable S offerte à l'air pour réaliser la relation (1).

L'équation de Torricelli donne pratiquement (pour les faibles valeurs de la dépression h utilisées)

$$\frac{h}{S} = KQ^2.$$

Soit Q_1 un débit fictif, proportionnel à q, c'est-à-dire tel que

$$\frac{h}{S} = KQ_1^2 \times \varphi_1(\alpha)$$

ou

$$(2) \qquad \frac{h}{S \times \varphi_1(\alpha)} = KQ_1^2.$$

D'après M. Lauret, la perte de charge dans un gicleur est de la forme $aq^2 + bq$. Ici

$$(3) \qquad h - H' = aq^2 + bq - z.$$

Or H' et h sont des dépressions inférieures à 60^{cm} d'eau alors que H atteint 6^m. On peut donc admettre que H' et h varient suivant la même fonction de H, c'est-à-dire que, pour une valeur constante de α, elles sont proportionnelles à

$$H' = h f_1(\alpha).$$

En portant cette valeur dans (3), on a

$$(4) \qquad h[1 - f_1(\alpha)] = aq^2 + bq - z.$$

D'après M. Poincaré [1] (et cette hypothèse est sanctionnée par l'adoption presque générale du gicleur à dénoyage), les seconds membres des équations (2) et (4), c'est-à-dire (KQ_1^2) et $(aq^2 + bq - z)$ sont pratiquement égaux (à un coefficient K_1 près) entre les limites utiles de h et pour des valeurs convenables de a, b et z. La même relation existe donc entre les premiers membres des mêmes équations (2) et (4) :

$$K_1 \frac{h}{S \times \varphi_1(\alpha)} = h[1 - f_1(\alpha)]$$

ou

$$(5) \qquad S = f_2(\alpha),$$

ce qui montre que, si l'accouplement des papillons 3 et 4 réalise la relation (5), les débits q et Q réaliseront la relation (1).

2° La loi sinusoïdale d'ouverture du papillon H est assimilable, pour la faible ouverture angulaire utilisée, à une exponentielle (avec une approximation de $\pm 5\,^0/_0$), et par suite la valeur $\frac{dS}{S\,d\beta}$ est approximativement constante, quel que soit β; c'est-à-dire qu'une certaine variation de longueur

---

(1) POINCARÉ, *Les carburateurs* (*Nouvelle Encyclopédie Léauté*).

de la bielle 5 entraîne une correction proportionnelle au débit. Ceci permet, en introduisant un organe 6 faisant varier la longueur de la bielle suivant une loi convenable de la température ou de la pression ambiante, ou de l'une et de l'autre, de compenser automatiquement les variations de densité de l'air.

3° Si, d'une part, on admet que H' est pratiquement négligeable quand $\alpha = 80^\circ$, et si, d'autre part, on fait en sorte que S varie dans le rapport de 1 à 8 ou 10 lorsque α passe de 0 à 80°, en ouvrant un orifice O_3 suffisamment grand pour faire tomber H' à une valeur négligeable quel que soit α, c'est-à-dire pour mettre la cuve à la pression atmosphérique, la valeur normale de $\frac{q}{Q}$ sera multipliée par 8 ou 10 pour les valeurs de α voisines de 0, sans que cette valeur soit pratiquement modifiée pour $\alpha = 80^\circ$.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur le calcul des vitesses critiques des arbres tournants de section constante et de masse non négligeable portant des disques minces parfaitement centrés.* Note de M. **Th. Got**, présentée par M. E. Jouguet.

La détermination des vitesses critiques de flexion des arbres tournants, de section non uniforme et portant des charges continues, dépend de la résolution de l'équation déterminante $D(\lambda) = 0$ d'une équation intégrale. (Travaux de M. Van den Dungen.) Mais, d'une part, cette équation se trouve déjà entachée d'erreurs par suite de l'emploi, plus ou moins légitime pour l'établir, des hypothèses de la résistance des matériaux, et, d'autre part, le calcul de ses racines est très ardu, si l'on veut une approximation suffisante.

Mais si l'on suppose l'arbre cylindrique et les charges concentrées (disques d'épaisseur négligeable), le centrage parfait, et la vitesse de rotation assez grande pour qu'on puisse négliger la pesanteur, il est possible, malgré la complication de l'équation transcendante à laquelle on parvient pour les vitesses critiques, d'en obtenir les solutions à l'aide de graphiques et de calculs simples d'interpolation.

Soit, par exemple, un arbre de longueur l, de poids p par unité de longueur, tournant dans des paliers à rotules, et portant un disque de poids P, distant de l_1 et l_2 des extrémités $(l_1 + l_2 = l)$; nous appelons I' la différence

des moments d'inertie principaux du disque et nous posons

$$I' = \frac{P}{g} K^2, \quad r^4 = \frac{\omega^2 p}{g EI}, \quad \alpha = \frac{P}{p} r, \quad \beta = \frac{P}{p} K^2 r^3,$$

ω désignant la vitesse angulaire de rotation, E le coefficient d'élasticité, I le moment d'inertie diamétral de la section de l'arbre.

L'équation aux vitesses critiques est la suivante :

$$\begin{aligned}&(2\sin rl - \alpha \sin rl_1 \sin rl_2 - \beta \cos rl_1 \cos rl_2)\\ &\quad\times(2\,\mathrm{sh}\, rl + \alpha\,\mathrm{sh}\, rl_1\,\mathrm{sh}\, rl_2 + \beta\,\mathrm{ch}\, rl_1\,\mathrm{ch}\, rl_2)\\ &\quad+(\alpha \sin rl_1\,\mathrm{sh}\, rl_2 + \beta \cos rl_1\,\mathrm{ch}\, rl_2)(\alpha \sin rl_2\,\mathrm{sh}\, rl_1 + \beta \cos rl_2\,\mathrm{ch}\, rl_1) = 0.\end{aligned}$$

Cette équation a été établie par Dunkerley [1], mais il n'en a pas étudié la résolution. Or, par une transformation sans autre difficulté que la longueur des calculs, on peut lui donner la forme suivante :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\mathrm{sh}\, rl_1\,\mathrm{sh}\, rl_2}{2\,\mathrm{sh}\, rl} - \frac{\sin rl_1 \sin rl_2}{2 \sin rl}\right)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{\mathrm{ch}\, rl_1\,\mathrm{ch}\, rl_2}{2\,\mathrm{sh}\, rl} - \frac{\cos rl_1 \cos rl_2}{2 \sin rl}\right)\\ &\quad= -\frac{1}{16}\left[\frac{\mathrm{sh}\, r(l_1 - l_2)}{\mathrm{sh}\, rl} - \frac{\sin r(l_1 - l_2)}{\sin rl}\right]^2.\end{aligned}$$

Cette dernière forme se prête à la recherche de valeurs approchées des racines par intersection de courbes.

En particulier, pour $l_1 = l_2$ (disque au milieu), l'équation se dédouble en les deux suivantes :

$$\frac{p}{Pr} = \frac{1}{4}\left(\mathrm{tang}\,\frac{rl}{2} - \mathrm{th}\,\frac{rl}{2}\right),$$

$$\frac{p}{PK^2 r^3} = \frac{1}{4}\left(\cot\frac{rl}{2} - \coth\frac{rl}{2}\right).$$

La première ne fait pas intervenir K, c'est-à-dire l'effet gyrostatique du disque (nombre de ventres *impair*, élastique *symétrique* par rapport au plan perpendiculaire à l'axe en son milieu); la seconde fait intervenir K, c'est-à-dire l'effet gyrostatique du disque (nombre de ventres *pair*, élastique *dissymétrique*). Il y a donc deux séries nettement différentes de vitesses critiques. De plus la résolution graphique conduit à ce résultat remarquable que la *première vitesse critique* ω_1 *due à la force centrifuge seule est nettement isolée; au contraire les vitesses critiques centrifuges sui-*

---

(1) *Philosophical Transactions*, 185, 1895, p. 279 à 360.

vantes ω_2, ω_3 *etc. sont très voisines des vitesses critiques gyrostatiques* ω'_1, ω'_2, *etc. La différence devient de plus en plus petite à mesure que le rang s'élève et aussi à mesure que le poids et les dimensions du disque sont plus importants par rapport à ceux de l'arbre : il correspond donc à ces vitesses critiques d'ordre supérieur des zones d'instabilité accrue particulièrement dangereuses dans l'échelle des vitesses.*

Par exemple pour $P = pl$ et $K = \frac{l}{4}$ on trouve pour les racines successives des deux équations

$$\frac{r_1 l}{2} = 1,20, \qquad \frac{r_2 l}{2} = 4,12, \qquad \frac{r_3 l}{2} = 7,2, \qquad \ldots,$$

$$\frac{r'_1 l}{2} = 3,75, \qquad \frac{r'_2 l}{2} = 7,1 \qquad \ldots.$$

En poussant l'approximation plus loin on obtient dans ce cas pour la première vitesse critique la valeur

$$\omega_1 = 5,693\sqrt{\frac{g\text{EI}}{\text{P}l^3}}$$

exacte à 0,001 près.

J'ai obtenu pour le cas de l'arbre portant un disque et tournant dans des paliers assurant l'invariabilité de direction l'équation suivante :

$$\left(\alpha - \sum \frac{\cos rl\,\text{sh}\,rl + \sin rl\,\text{ch}\,rl}{1 - \cos rl\,\text{ch}\,rl}\right)\left(\beta - \sum \frac{\cos rl\,\text{sh}\,rl - \sin rl\,\text{ch}\,rl}{1 - \cos rl\,\text{ch}\,rl}\right)$$
$$= -\left(\Delta \frac{\sin rl\,\text{sh}\,rl}{1 - \cos rl\,\text{ch}\,rl}\right)^2$$

dans laquelle α et β ont la même signification que plus haut et les abréviations Σ et Δ sont définies par

$$\Sigma f(l) = f(l_1) + f(l_2), \qquad \Delta f(l) = f(l_1) - f(l_2).$$

Cette équation se traite comme la précédente et conduit à des résultats analogues.

Le cas de l'arbre chargé d'un nombre quelconque de disques est traité dans un Mémoire détaillé.

ASTRONOMIE. — *Remarques sur les parallaxes dynamiques des étoiles doubles.* Note [1] de M. D. **Barbier**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Rappelons que l'on appelle parallaxe dynamique d'une étoile double une parallaxe hypothétique déduite de son mouvement orbital, soit que l'orbite ait été complètement déterminée, soit que l'on ne connaisse qu'un petit arc de sa projection sur le plan tangent à la sphère céleste. C'est de ce dernier cas que nous nous occuperons ici, notre but étant de relever des erreurs généralement commises.

D'une manière très générale la parallaxe ϖ s'exprime à l'aide d'une formule de la forme suivante :

$$\varpi = M^{-\frac{1}{3}} \alpha(j, \varphi, e, g)\, \beta(\rho, \rho', \rho'', \theta'),$$

M est la masse du système, $\alpha(j, \varphi, e, g)$ une fonction de l'angle j du rayon vecteur vrai et de sa projection, de l'angle φ du plan projetant normalement le rayon vecteur avec le plan de l'orbite, de l'excentricité e et de l'anomalie moyenne g; $\beta(\rho, \rho', \rho'', \theta')$ désigne une fonction du rayon vecteur projeté ρ, de ses dérivées par rapport au temps et de la dérivée θ' de l'angle de position.

A l'aide des probabilités $p(j, \varphi)\, dj\, d\varphi$ et $P(e, g)\, de\, dg$ pour que j soit compris entre j et $j + dj$, φ entre φ et $\varphi + d\varphi$ et que e soit compris entre e et $e + de$ et g entre g et $g + dg$, on peut calculer la valeur moyenne $\bar{\alpha}$ de $\alpha(j, \varphi, e, g)$. La parallaxe dynamique est alors

$$\varpi = M^{-\frac{1}{3}} \bar{\alpha} . \beta(\rho, \rho', \rho'', \theta').$$

On prend pour $p(j, \varphi)$ l'expression

(1) $$p(j, \varphi)\, dj\, d\varphi = \frac{\cos j}{\pi}\, dj\, d\varphi.$$

Or cette formule n'est exacte que si l'on ne sait rien concernant le plan de l'orbite. Il est évident en effet que, si l'arc de courbe est rectiligne et si son prolongement passe par l'étoile principale, φ est nécessairement nul, alors que la formule (1) implique pour φ toutes les valeurs possibles entre 0 et π.

---

[1] Séance du 19 octobre 1931.

On peut préciser davantage. On a

$$e^2 = \frac{(\omega \sin\varphi + \sin j \cos\varphi)^2 \cos^2 j + (\sigma \sin^2\varphi - \cos^2 j)^2}{\sigma^2 \sin^4\varphi},$$

avec

$$\omega = \frac{\rho'}{\rho\theta'}, \qquad \sigma = 1 - \frac{\rho''}{\rho\theta'^2}.$$

La condition $e^2 < 1$ entraîne la relation

$$(\omega^2 - 2\sigma + \cos^2 j)\,\text{tang}^2\varphi + 2\omega \sin j\,\text{tang}\,\varphi + 1 < 0.$$

On a d'abord

$$\cos j < \sqrt{\frac{2\sigma}{1+\omega^2}}.$$

Si $\frac{2\sigma}{1+\omega^2} < 1$, cette condition n'est pas toujours remplie. Elle donne d'ailleurs une limite inférieure de l'inclinaison i de l'orbite car $i > j$. D'autre part, on doit avoir :

$$\frac{-\omega - \sqrt{2\sigma}}{\omega^2 - 2\sigma} < \text{tang}\,\varphi < \frac{-\omega + \sqrt{2\sigma}}{\omega^2 - 2\sigma}.$$

Ainsi tang φ ne peut varier qu'entre des limites bien déterminées.

Soit l'étoile βGC 7375. Pour l'année 1869, on a $\omega = 4,0$, $\sigma = 0,15$, par suite

$$\cos j < 0,13, \qquad -0,29 < \text{tang}\,\varphi < -0,22, \qquad i > 82^\circ;$$

les données étant assez incertaines on pourrait avoir $\sigma = 1,0$ et par suite

$$\cos j < 0,34, \qquad -0,38 < \text{tang}\,\varphi < -0,18, \qquad i > 70^\circ.$$

La formule (1) est à remplacer par la formule rigoureuse :

$$(2) \qquad p(j, \varphi)\,dj\,d\varphi = \text{P}[e(j, \varphi, \omega, \sigma);\, g(j, \varphi, \omega, \sigma)]\frac{\text{D}(e, g)}{\text{D}(j, \varphi)}\,dj\,d\varphi.$$

Comme $\text{P}(e, g)$ est inconnu, cette formule est malheureusement inutilisable, mais elle montre : 1° que $p(j, \varphi)$ et $\text{P}(e, g)$ ne sont pas indépendants comme il était supposé; 2° que $\bar{\alpha}$ dépend de l'arc de courbe considéré et en particulier de ω et σ.

Pour $\text{P}(eg)\,de\,dg$ on prend généralement une expression de la forme $\text{P}_1(e)\,de\,dg$; nous venons de voir qu'elle est incorrecte puisqu'elle dépend de l'arc de courbe; en outre on fait l'hypothèse que la répartition de g est

uniforme. Nous avons montré (¹) que ceci n'est pas justifié dans le cas d'étoiles d'orbites inconnues; il en est de même lorsque l'orbite est connue. Pour celles d'entre elles de période supérieure à 100 ans et pour l'année 1900, on a :

$\pm g$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
Nombre de couples (%)	52,6	7,9	13,1	7,9	10,6	7,9	

Cette répartition dépend d'ailleurs de la longueur de l'arc connu de l'orbite et de la distance moyenne des étoiles considérées.

Comparons, par exemple, les parallaxes dynamiques ϖ_0 tirées des formules de Jackson et de Russell Hertzsprung, aux parallaxes trigonométriques ϖ du catalogue de Schlesinger (²). Les parallaxes dynamiques de Jackson sont extraites du catalogue de Greenwich (³). Pour 21 étoiles on a

$$\overline{\varpi_0} = 0'',0377 \quad \text{et} \quad \overline{\varpi} = 0'',0222.$$

L'écart de ces moyennes est assez considérable et, dans quatre cas seulement, on a $\varpi_0 < \varpi$.

Pour 174 parallaxes de Russell (⁴) on a $\overline{\varpi_0} = 0'',0313$, $\overline{\varpi} = 0'',0305$. Nous avons calculé les équations des droites de régression et le coefficient de corrélation r :

$$\varpi = 0'',0059 + 0,7826\,\varpi_0,$$
$$\varpi_0 = 0'',0038 + 0,9033\,\varpi,$$
$$r = 0,84.$$

En gros, l'accord est bien meilleur que pour la formule de Jackson, mais le coefficient de régression de la première droite est assez différent de l'unité, ce qui entraîne une erreur fonction de ϖ_0.

ASTRONOMIE. — *Le spectre de la Lune éclipsée.* Note de M. **J. Dufay**, présentée par M. Ch. Fabry.

I. La Lune traversant l'ombre de la Terre n'est plus éclairée que par les rayons réfractés par l'atmosphère terrestre; l'étude de son spectre permet

(¹) D. Barbier, *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 1635.
(²) *General catalogue of stellar parallaxes*, by Frank Schlesinger, 1924.
(³) *Catalogue of double stars* (Royal Observatory of Greenwich, 1921).
(⁴) H. N. Russell et C. E. Moore, *Dynamical parallaxes of 1777 double stars* (*Astronomical Journal*, **39**, 1929, p. 166).

donc d'observer à une échelle inaccoutumée les effets produits par la diffusion et l'absorption sélective dans notre atmosphère.

Ce spectre a été photographié déjà par M. A. de la Baume-Pluvinel (1) et par M. V. M. Slipher (2) pendant les éclipses partielles. Plus récemment, MM. J. M. Moore et L. A. Brigham ont obtenu un excellent cliché, au cours d'une éclipse totale, en utilisant une région située presque au bord de l'ombre géométrique (3).

Pendant l'éclipse totale du 26 septembre 1931, j'ai cherché à étudier à l'Observatoire de Lyon le spectre de régions beaucoup plus voisines du centre de l'ombre et à obtenir quelques renseignements numériques sur la répartition spectrale de la lumière éclairant la Lune.

Le spectrographe à deux prismes de flint de 60° est muni d'un objectif de 60mm d'ouverture et de 90mm de distance focale. La fente présente, dans sa hauteur, deux parties de largeurs différentes, permettant d'obtenir simultanément deux spectres dont les éclairements sont dans un rapport connu. Pour l'éclairer uniformément, on projette sur elle, au moyen d'un objectif auxiliaire, l'image de l'objectif du sidérostat. Un diaphragme circulaire, placé dans le plan focal du sidérostat, isole une région de la Lune de 15′ de diamètre, sur laquelle portent les observations.

Les plaques Lumière, étiquette bleue, ont été sensibilisées au pinacyanol pour les radiations visibles, jusque vers 7000 Å.

2. Une pose de 28 minutes a été faite pendant la totalité sur une région de la Lune dont le centre a été, en moyenne, distant de 13′,5 du centre de l'ombre. Une pose de 20 minutes a été faite pendant la seconde phase partielle sur une région de l'ombre dont le centre est resté à 28′,5 du centre de l'ombre.

Des poses de comparaison de durées variées ont été faites après l'éclipse sur la Lune, puis sur le ciel au voisinage immédiat. On diaphragmait dans le premier cas la face de sortie du second prisme avec une fente perpendiculaire aux arêtes.

Les clichés ont été étudiés au microscope et leur noircissement ont été mesurés au microphotomètre enregistreur.

---

(1) *Bulletin de la Société astronomique de France*, 17, 1902, p. 225.

(2) V. M. Slipher, *On the Spectrum of the Eclipsed Moon* (*Astronomische Nachrichten*, 199, 1914, col. 103).

(3) J. H. Moore et L. A. Brigham, *The Spectrum of the Eclipsed Moon* (*Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 39, 1927, p. 223).

3°. Le spectre obtenu pendant la totalité s'étend de 5425 à 7040 Å environ, mais il est très faible de 5425 à 6030 Å. Il n'y a aucune trace d'impression dans le bleu, malgré la sensibilité relativement grande des plaques dans cette région. En dehors de la raie solaire C(H_α), on distingue les raies en bandes suivantes :

6867 Å, bande B de l'oxygène, extrêmement accentuée;
6460 Å, raie ou bande fine, non identifiée, probablement d'origine tellurique ([1]);
6305 Å, bande α de l'oxygène.

Deux bandes, situées vers 6100 et 6200 Å, sont trop faibles pour pouvoir être exactement repérées.

Les mesures photométriques projetées n'ont pu être exécutées que vers l'extrémité rouge du spectre. Soit R le rapport entre la brillance spectrale de la Lune éclipsée, et la brillance spectrale de la Lune après l'éclipse. En posant arbitrairement $R = 1$ pour la radiation 6555 Å, on obtient les nombres du tableau ci-dessous :

λ(Å).............	6310.	6445.	6555.	6683.	6810.	6935.
R..............	(0,45)	0,64	1,00	1,27	1,33	1,37

Le rapport R paraît augmenter très rapidement dès l'extrémité de la bande α de l'oxygène et jusque vers 6680 Å : dans cette région, sa valeur est à peu près doublée quand la longueur d'onde croît de 200 Å. Au delà, l'accroissement de R devient beaucoup plus lent.

4. Le spectre obtenu pendant la phase partielle s'étend de 3960 à 7000 Å et montre plus faiblement les mêmes bandes telluriques que le spectre de la phase totale. L'étude photométrique a conduit aux conclusions suivantes : dans les régions bleue et violette, la répartition de l'énergie est la même que dans le spectre du ciel au voisinage de la Lune non éclipsée. Toute l'impression obtenue au-dessous de 5000 Å peut être attribuée à la lumière diffusée par l'atmosphère éclairée par la partie de la Lune sortie de l'ombre et accessoirement à la lumière diffusée par le miroir et l'objectif du

([1]) En plus d'une raie du calcium d'intensité 5 à 6461,8 Å et d'une raie du fer d'intensité 3 à 6462,9 Å, les Tables de Rowland indiquent la présence entre 6457 et 6454 Å de 13 raies telluriques faibles dont 7 entre 6450,1 et 6461,2 Å (*Astrophysical Journal*, 3, 1896, p. 358).

sidérostat. Dans l'extrême rouge même, moins d'un cinquième de l'éclairement, provient réellement de la partie de la Lune plongée dans l'ombre. Les valeurs numériques de R obtenues de 5500 à 6900 Å, en faisant abstraction de la lumière diffusée, sont, par suite, très incertaines. Elles croissent en même temps que la longueur d'onde et montrent une large bande d'affaiblissement autour de 6000 Å qui coïncide avec une bande de la vapeur d'eau et le maximum d'absorption de l'ozone atmosphérique.

ASTRONOMIE. — *Étude photométrique de l'éclipse de Lune du 26 septembre* 1931. Note de M. **René Gindre**, présentée par M. Ch. Fabry.

1. L'éclipse de Lune du 26 septembre 1931 a été observée dans d'assez bonnes conditions à l'Observatoire de Lyon. Le ciel, un peu nuageux pendant la première phase partielle, s'est progressivement éclairci pour devenir pur à partir du milieu de la totalité.

La grandeur stellaire visuelle de la Lune a été fréquemment mesurée pendant la totalité au moyen d'un photomètre universel sans écran diffusant de Fabry et Buisson ([1]) légèrement modifié, dont le coin et les écrans absorbants ont été étalonnés au laboratoire. La distance focale de l'objectif est de 30^{cm}; au foyer de celui-ci est placé un œilleton de diamètre légèrement supérieur au diamètre de l'image de la Lune. On peut ainsi comparer sans difficulté la Lune éclipsée à des étoiles sensiblement plus faibles.

La Lune était comparée à la planète Saturne, qui se trouvait à peu près à la même distance zénithale. Les corrections d'absorption atmosphérique sont donc très réduites; les observations successives de Saturne ont permis de les évaluer. A partir du milieu de la totalité, la densité optique de l'atmosphère suivant la verticale a gardé la valeur constante $D = 0{,}09$, correspondant à une perte de grandeur au zénith de 0,225 magnitude.

Les observations devaient en outre être corrigées de la brillance du ciel : ces corrections ont été obtenues en faisant, après chaque série de pointés sur la Lune et sur Saturne, une série de pointés sur le ciel au voisinage de ces deux astres.

2. L'ensemble des mesures, comprenant 236 pointés, a permis de tracer la courbe représentant les variations de la grandeur stellaire de la Lune au

---

([1]) Ch. Fabry et H. Buisson, *Photomètre universel sans écran diffusant* (*Revue d'Optique*, **1**, 1922, p. 1).

cours de l'éclipse totale. Les nombres du tableau ci-dessous donnent, en fonction de la distance du centre de la Lune au centre de l'ombre, la magnitude visuelle de la Lune, ramenée à sa distance moyenne à la Terre.

Distances.	Magn.	Distances.	Magn.
23′	−2,97	17′	−2,25
22	−2,82	16	−2,10
21	−2,68	15	−1,87
20	−2,47	14	−1,57
19	−2,37	13 30″	−1,42
18	−2,32		

On a pris comme magnitude visuelle de Saturne la valeur + 0,83. Celle-ci a été obtenue en comparant quelques jours plus tard Saturne à l'étoile Véga et en tenant compte de la variation de distance de la planète entre les deux soirées.

On a pris par définition la magnitude de Véga égale à + 0,14 (¹) et, pour éviter les corrections d'absorption atmosphérique, on a suivi dans le cours de la soirée Saturne, Véga et Capella. En portant en abscisses les masses d'air, en ordonnées les magnitudes obtenues, ces observations ont permis de construire trois droites, parfaitement parallèles, dont les distances suivant l'axe des ordonnées mesurent la différence de magnitude de ces astres. Les observations de l'étoile Polaire, répétées à plusieurs reprises au cours de la soirée, ont d'ailleurs montré que la transparence de l'atmosphère était restée invariable (²).

3. Il est intéressant de comparer les résultats ci-dessus à ceux qu'ont obtenus par la même méthode MM. Dufay et Couder pendant l'éclipse du 14 août 1924 (³). La forme de la courbe correspondant à l'éclipse de 1931 diffère assez notablement de celle correspondant à l'éclipse de 1924, mais, pour une même distance au centre de l'ombre, la Lune était plus sombre en 1924 qu'en 1931. La différence est surtout accentuée dans la partie moyenne de l'ombre : à 18′ du centre de celle-ci, elle atteint une magnitude. Pour cette distance, la Lune était deux fois et demie plus brillante pendant la plus récente éclipse.

(¹) *Harvard Revised Photometry* (*Harvard Annals*, **50**, 1908, p. 158).

(²) En prenant pour Véga la magnitude + 0,14, on obtient pour Capella + 0,26 et pour la Polaire + 2,07.

(³) Dufay et A. Couder, *Étude photométrique de l'éclipse totale de Lune du 14 août 1924* (*Comptes rendus*, **180**, 1925, p. 194, et *Bulletin de la Société astronomique de France*, **39**, 1925, p. 213).

ASTRONOMIE. — *Étude photométrique et colorimétrique de l'éclipse totale de Lune du 26 septembre 1931.* Note de M. **A. Danjon**, présentée par M. Ernest Esclangon.

J'ai observé l'éclipse de Lune du 26 septembre à Cavalaire (Var), sous un ciel très pur, et j'ai déterminé, en fonction de la distance au centre de l'ombre, la diminution d'éclairement qu'on aurait constatée sur un écran photométrique indéfini situé à la place de la Lune. Cette détermination a été faite à travers deux filtres colorés (Wratten 25 et 58), par la méthode que j'ai décrite à propos d'une autre éclipse (*Comptes rendus*, 173, 1921, p. 706), en substituant à l'appareil primitif un photomètre à œil-de-chat (*Annales de l'Observatoire de Strasbourg*, 2, fasc. 1, 1928).

Comme je l'ai indiqué en 1921, il est nécessaire de poursuivre les mesures pendant toute la durée du phénomène, car la courbe d'éclairement se construit de proche en proche, à partir de l'entrée dans la pénombre; la première partie, une fois tracée, fournissant les corrections indispensables à son prolongement jusqu'au centre de l'ombre. Il faut aussi tenir compte des inégalités de l'albedo du limbe lunaire, qu'on détermine par des mesures faites aussitôt après la sortie de la pénombre. L'éclairement du ciel ne donne lieu à aucune correction, grâce à l'emploi d'un photomètre à double image, car il se superpose aux deux plages à comparer, sans en altérer l'égalité.

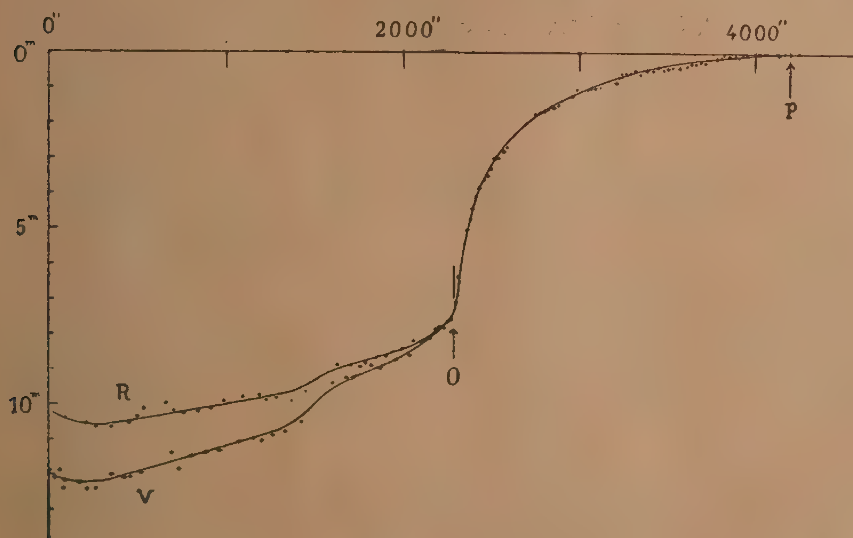
Dans ce qui suit, les densités de l'ombre (logarithme du rapport de réduction de l'éclairement) sont exprimées en magnitudes stellaires.

1° Ainsi que je l'ai toujours constaté, les densités observées dans la *pénombre* sont en accord excellent avec les densités que l'on calcule en admettant que la brillance au bord du Soleil est 0,4 de celle du centre. Toutefois, à moins de 3′ du bord de l'ombre, la lumière réfractée donne un éclairement sensible, et les points observés se séparent progressivement de la courbe calculée. Au bord géométrique de l'ombre, la densité était de $7^{m},35$, valeur déjà obtenue le 16 octobre 1921.

2° Dans le tableau suivant qui donne les densités pour les deux écrans colorés, les distances sont comptées du centre de l'ombre en minutes d'arc :

r.	R.	V.	V — R.
°	m	m	m
0	10,20	11,95	1,75
5	10,60	12,28	1,68
10	10,32	11,82	1,50
15	10,12	11,39	1,27
20	9,75	10,90	1,15
25	9,35	9,97	0,62
30	8,75	8,99	0,24
35	8,24	8,34	0,10
38	7,35	7,35	0,00

Vers la distance de 25°, les deux courbes présentent une inflexion, plus accusée en lumière verte; elle correspond à une variation rapide de la différence V — R qui définit la coloration. Cette quantité variait lentement



Variation de la densité à l'intérieur du cône d'ombre.

de 0 à 20°, dans la région centrale où la teinte passait insensiblement du rouge cerise au rouge feu; plus rapidement de 20 à 30°, la Lune passant alors par toutes les teintes du Soleil couchant; enfin très lentement dans la partie extérieure de l'ombre, de 30 à 38°, qui paraissait gris légèrement rosé puis gris neutre. On remarque un maximum relatif de l'éclairement au

centre même de l'ombre. Il peut s'expliquer par l'existence d'une focale des rayons réfractés le long de l'axe du cône d'ombre.

3° Comparée aux éclipses des dix dernières années, dont la plus claire fut celle du 16 octobre 1921, l'éclipse du 26 septembre 1931 est caractérisée par l'éclat de la partie marginale de l'ombre. A 5° du bord de l'ombre, la densité en lumière rouge atteignait seulement $8^m,3$ au lieu de $9^m,1$ en 1921. En revanche, la partie centrale était un peu plus sombre cette année, mais la différence n'atteignait pas $0^m,3$.

Les variations marginales de la densité de l'ombre paraissent importantes, et elles présentent un intérêt particulier, les phénomènes atmosphériques qu'elles décèlent ayant leur siège à haute altitude, au delà de la région atteinte par les fluctuations météorologiques banales. La méthode que j'ai adoptée analyse ces variations avec plus de détails que ne le ferait la mesure des magnitudes globales, et elle a le grand avantage de s'appliquer aux éclipses partielles.

Remarques au sujet de la Note précédente, par M. **Ernest Esclangon**.

Les éclipses de Lune, sans grande importance actuellement au point de vue de l'Astronomie de position, ont, par leur étude photométrique systématique, un intérêt tout particulier car l'éclat résiduel de la Lune éclipsée (éclat qui se montre variable d'une éclipse à l'autre) est fonction de certaines propriétés optiques de l'atmosphère.

Il résulte de la Note de M. Danjon que ce sont, semble-t-il, les régions marginales de l'ombre, dont l'éclat est sous la dépendance des couches élevées de l'atmosphère, qui sont le plus sujettes à des variations importantes.

Cette conclusion pourrait être également déduite de certaines observations auxquelles se prêtait particulièrement l'éclipse du 26 septembre 1931.

La date de cette éclipse était voisine de celle de l'équinoxe d'automne. A ce moment, l'axe terrestre était sensiblement dans le plan du contour apparent de la Terre, vue de la Lune; en d'autres termes, les régions de l'atmosphère qui, par réfraction des rayons solaires, provoquaient l'éclat résiduel de la Lune éclipsée, étaient voisines d'un grand cercle passant par les pôles. Le long d'un tel cercle, il est évident que les basses couches atmosphériques sont dans des états physiques très différents; de sorte que, si elles interviennent réellement dans la densité de certaines parties de

l'ombre, il doit se produire une perturbation plus ou moins marquée de la symétrie du phénomène par rapport à la droite joignant le centre de la Lune au centre de l'ombre, perturbation en relation avec le diamètre qui, dans l'ombre, correspond à l'axe défini par les pôles terrestres.

Il aurait été intéressant d'étudier d'une manière précise les densités relatives de l'ombre à ce point de vue. Dans l'observation que j'ai faite de l'éclipse en Haute-Provence ([1]), mon attention avait été attirée sur cette particularité; je n'ai pu observer réellement aucune dissymétrie, mais je ne disposais que de moyens insuffisants et il me serait impossible de formuler une conclusion absolue sur ce point. L'inexistence de dissymétrie, au moins sur les parties marginales, entraînerait cette conséquence que, dans la formation de cette région de l'ombre, seules interviennent les couches élevées de l'atmosphère dont les propriétés optiques, à ce point de vue, seraient les mêmes aussi bien près que loin des pôles.

Dans tous les cas, l'observation des éclipses de Lune, voisines des équinoxes, pourrait se prêter d'une manière intéressante à l'étude de ce point particulier.

GÉODÉSIE. — *Sur quelques mesures de la gravité dans la région parisienne.* Note ([2]) de MM. **L. Éblé** et **E. Salles**, présentée par M. Georges Perrier.

Les mesures dont les résultats sont donnés ci-après sont exclusivement des mesures relatives; le point de départ choisi a été l'Observatoire de Paris où l'on a admis pour g la valeur de Defforges ramenée au système de Potsdam,

$$g = 980,943 \text{ cm/sec}^{-2}.$$

Elles ont été exécutées pendant l'été de 1931 au moyen d'un appareil de Sterneck.

L'observation consiste en la mesure, par la méthode des coïncidences, des temps d'oscillation de quatre pendules rectangulaires en invar, oscillant sous une cloche où l'on établit une pression très réduite de l'ordre du centimètre: le temps est mesuré au moyen d'un chronomètre de temps moyen

([1]) *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 469.

([2]) Séance du 19 octobre 1931.

Nardin, à contacts électriques. Les constantes de l'appareil ont été déterminées au début de 1931 dans une salle du sous-sol de l'Institut de Physique du Globe, par M. Kostitzin, qui a étudié également l'influence de différents supports.

Le chronomètre était comparé avec la pendule directrice de l'Observatoire, immédiatement avant et après les séries d'oscillations, lorsqu'on travaillait dans la salle de gravité de cet établissement; en campagne, on utilisait les signaux horaires de la Tour Eiffel et de Bordeaux-Lafayette, quand le trafic commercial permettait de les saisir.

Les expériences de M. Kostitzin destinées à la détermination des corrections instrumentales ont conduit à une valeur de g au sous-sol de l'Institut de Physique du Globe; nous avons ensuite opéré, à titre d'essai, à l'Observatoire du Parc Saint-Maur (13 observations), ce qui a permis d'obtenir également une valeur de la gravité en ce point. Puis une importante série à l'Observatoire de Paris (30 observations) a fourni les valeurs de départ des temps d'oscillation en un lieu où la valeur absolue de la gravité était connue. Enfin deux séries ont été faites à Beauvais (12 observations) et à Versailles (11 observations), dans les sous-sols des lycées de ces deux villes.

Les résultats sont contenus dans le tableau suivant :

Valeurs de g (en cm/sec^{-2}).

Stations.	Altitudes.	Sans réductions.	Après corrections : d'altitude.	Après corrections : de Bouguer.	Anomalies (¹).
Observatoire de Paris	m 61	980,943	980,962	980,956	—0,006
Institut de Physique du Globe	55	980,932	980,949	980,943	—0,020
Parc Saint-Maur	47	980,945	980,960	980,955	—0,006
Beauvais	70	980,965	980,987	980,981	—0,035
Versailles	131	980,919	980,959	980,946	—0,012

GÉOGRAPHIE. — *Une mission scientifique au Tibesti.* Note de M. **Dalloni.**

Depuis la mémorable exploration de Nachtigal (1869), le Tibesti a été étudié, ces dernières années, par le lieutenant-colonel Tilho qui en a dressé, en 1925, une carte provisoire au $\frac{1}{1000000}$, ainsi que des régions voisines de

(¹) Après correction de Bouguer et par rapport à la valeur normale calculée par la formule de Helmert (1901).

Borkou et de l'Ennedi, en utilisant ses propres observations, ainsi que les renseignements fournis par d'autres officiers en opérations dans ces parages; le même auteur avait déjà communiqué à l'Académie les principaux résultats de ses voyages (¹) puis, d'après les échantillons rapportés par lui, M. A. Lacroix avait décrit les caractères des roches volcaniques du Tibesti et en particulier de l'Emi Koussi (²). D'autre part, le commandant Rottier a publié ses observations sur la partie nord-ouest du massif (³), où il a recueilli des matériaux qui ont permis à M. Denaeyer d'en esquisser la géologie (⁴).

Le Tibesti a été rattaché administrativement à la Colonie du Tchad et des postes ont été créés en divers points pour assurer l'ordre et la sécurité dans ce pays, qui prolonge ainsi, vers le Nord, nos territoires de l'Afrique équatoriale française jusqu'aux frontières de la Libye.

Le moment a paru favorable à M. le ministre des Colonies pour décider qu'une mission scientifique se rendrait au Tibesti, afin d'en étudier la constitution géologique et la minéralogie, compléter le réseau géodésique et relever la topographie des parties les moins connues du massif. Cette mission vient de rentrer en France après un voyage de huit mois (octobre 1930-mai 1931). J'ai eu l'honneur de la diriger avec, comme collaborateurs, les capitaines Simon et Cance, des troupes coloniales, et M. de Choubersky, licencié ès sciences.

Je rappelle que le Tibesti est une région de hautes montagnes, à peu près également distante des rives du lac Tchad et de celles de la Méditerranée et séparant le Sahara du Désert libyque. C'est par le Sud que nous l'avons abordée, après avoir traversé depuis Faya les plateaux rocheux du Borkou; mais nous avons contourné, à partir de Yono, le pied du Koussi, pour explorer le versant oriental du massif. Des vallées profondément encaissées dans les grès siluriens, puis vers l'origine ensevelies sous le sable, nous ont conduit en quelques journées sur la crête des « tarsos », ligne continue de hauts plateaux très accidentés par les chaînons volcaniques qui hérissent de mille aspérités la plate-forme primaire; c'est à la limite des deux zones que

---

(¹) *Comptes rendus*, **168**, 1919, p. 984 et 1081; en collaboration avec M. A. Lacroix, **168**, 1919, p. 1169 et 1237. Plus récemment, le lieutenant-colonel Tilho a publié un important Mémoire : *Du lac Tchad aux montagnes de Tibesti* (1926).

(²) *Comptes rendus*, **169**, 1919, p. 402.

(³) *Renseignements coloniaux* du Comité de l'Afrique française, n° **1**, 1924.

(⁴) *Comptes rendus*, **178**, 1924, p. 472.

se présentent les villages de Goumeur et d'Aozi, ainsi que quelques petites palmeraies voisines, cachées dans de véritables cañons, près de sources assez abondantes : ils nous ont servi de bases pour visiter ce pays de parcours difficile, où des nappes basaltiques d'aspect tabulaire, aux parois abruptes, sont séparées par des falaises ébouleuses de tufs et de rhyolite.

D'Aozi, la mission, obliquant au Nord-Est, est redescendue jusqu'à Ouri, à travers d'interminables plaines sablonneuses, presque dépourvues d'eau et de végétation, avec quelques collines de grès qui se prolongent par l'important chaînon désigné sous le nom de Kemet sur la carte Tilho et que les indigènes nomment Dohon Tarso. A partir du Pic Bette (2286^m), cet éperon gréseux paraît encore surmonté par des laves; sa direction, assez différente de celle qui est figurée sur les cartes, forme un angle d'environ 70° E. avec le Nord géographique, mais il représente l'axe d'un éventail dont l'aile occidentale comprend une série de chaînons orientés sensiblement Nord-Ouest, Sud-Est, l'ensemble constituant un massif dont l'existence était insoupçonnée.

Au point de vue géologique, on est là dans une région complètement différente des précédentes; c'est une succession indéfinie de plis parallèles, dirigés Nord-Sud ou Nord-Nord-Est — Sud-Sud-Ouest, fortement serrés, constitués par des terrains cristallins (granite, diorite, etc.) toujours écrasés, des schistes et des grès avec quelques lentilles calcaires, en bancs verticaux et très disloqués. Tout le front septentrional du Tibesti, depuis le Kemet jusqu'aux environs de Wour et d'Abo, vers l'Ouest, sur près de 350^{km}, offre les mêmes caractères, avec prédominance des schistes dans cette dernière région. Par ailleurs, le pays est extrêmement raviné et sur le sol imperméable, couvert de maigres pâturages dans le lit des torrents, les eaux s'écoulent rapidement pour aller se perdre dans les dépressions sablonneuses qui bordent au Nord le massif.

C'est sur ce substratum profond, d'âge antécambrien que repose, comme une couverture à peine gondolée et déformée par les mouvements plus récents, la puissante assise des grès siluriens dont la surface est absolument désertique, tandis que les eaux d'infiltration, émergeant au niveau des schistes, donnent la vie aux jardins de Bardaï, d'Ozou, de Guezenti, etc.; ce sont ces mêmes eaux de la base du Silurien, qui, sur le versant sud, alimentent les palmeraies du Borkou.

De Bardaï, la mission a pu explorer la haute chaîne volcanique qui domine le plateau gréseux et qui, orientée sensiblement de l'Est à l'Ouest, comprend une série de pitons dépassant parfois 3000^m. Enfin,

le retour sur Faya a permis de faire une coupe centrale du massif et de constater que, sous les basaltes du Tieroko, les grès siluriens reposent encore sur des terrains cristallins et des schistes, formant une large boutonnière dans la vallée de Miski.

En résumé, malgré les difficultés matérielles, tous les objectifs assignés à la mission ont été atteints. La structure géologique du Tibesti ressort avec évidence de la carte schématique au $\frac{1}{1000000}$ qui a pu être dressée et qui ne comporte plus que quelques lacunes sans grande importance. Les coordonnées des points déterminés par le C[ne] Simon, quoiqu'en partie provisoires, ont été utilisées pour la mise en place des itinéraires levés par le C[ne] Cance (1855[km]) et qui, construits au $\frac{1}{200000}$, seront rassemblés sur une feuille de projection à l'échelle du $\frac{1}{500000}$.

En outre, des fouilles ont été pratiquées dans la nécropole d'Aozou ; elles ont fourni des crânes et diverses parties du squelette d'anciens habitants du pays ; plusieurs stations préhistoriques ont donné de nombreuses pierres taillées et quelques haches polies. Les documents anthropologiques et ethnographiques ont été complétés par des calques de gravures et peintures rupestres. Une importante collection de roches, un herbier de toutes les plantes rencontrées en cours de route, ainsi que les collections entomologiques recueillies, sont étudiés au Muséum national d'histoire naturelle.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur un système électrique auto-entretenu utilisant un tube à néon.* Note de MM. **B. Decaux** et **Ph. Le Corbeiller**, présentée par M. G. Ferrié.

1. Si l'on monte en série une batterie de piles, un tube à néon et un condensateur, on observe, pour des valeurs convenables des constantes des organes employés, des éclats brefs du tube, séparés par une extinction de longue durée. Par exemple, avec une tension de 200 volts et un condensateur de 6 microfarads, présentant une résistance de fuite de 20 mégohms, une lampe veilleuse de type courant fournit des éclats espacés d'environ 20 secondes.

Chaque période du phénomène comporte deux phases. Pendant la première, le condensateur se charge rapidement à travers la résistance offerte par le tube à néon allumé ; la tension aux bornes de celui-ci baisse jusqu'au seuil d'extinction v_e. Pendant la seconde, le condensateur se décharge lentement sur sa résistance de fuite : la tension aux bornes du tube croît jusqu'au seuil d'allumage $v_a > v_e$.

Ce raisonnement conduit, en assimilant à une ligne brisée la caractéris-

tique de la lampe à néon, à des calculs simples dont les résultats quantitatifs sont en bon accord avec l'expérience.

2. On a admis, dans ce qui précède, que les régimes de charge et de décharge se substituaient l'un à l'autre instantanément avec discontinuité des courants. La continuité de ceux-ci est, en réalité, assurée par la self-induction du circuit entier, qui a une valeur très petite mais non nulle. Si, pour tenir compte de cet effet, on suppose qu'une self-inductance L, de valeur quelconque, soit en série dans le circuit, et qu'on représente par

$$v - v_0 = -\rho(i - i_0) + \gamma(i - i_0)^3$$

la caractéristique d'une résistance non linéaire équivalente au tube à néon, on trouve que la partie variable i du courant total $i_0 + i$ satisfait à l'équation non linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{1}{L}(\rho - 3\gamma i^2)\frac{di}{dt} + \frac{i}{CL} - \frac{1}{CL}(\rho i - \gamma i^3) = 0, \tag{1}$$

qui représente cette fois la totalité du phénomène.

Remplaçant i et t par des variables sans dimensions y et x, on amène cette équation à la forme

$$y'' - \varepsilon(1 - y^2)y' + y - k\left(y - \frac{y^3}{3}\right) = 0, \tag{2}$$

où ε et k sont des constantes positives, la seconde inférieure à l'unité.

3. On utilise ordinairement, pour obtenir à partir d'un tube à néon un phénomène périodique, un montage différent en vertu duquel un condensateur se décharge lentement à travers une résistance en série avec lui, et se décharge brusquement dans un tube à néon monté en parallèle. M. B. van der Pol [1] a rattaché ce dernier phénomène périodique, ainsi qu'un grand nombre d'autres, à l'équation

$$y'' - \varepsilon(1 - y^2)y' + y = 0 \tag{3}$$

dont l'équation (2) ne diffère que par la présence du terme supplémentaire $k\left(y - \frac{y^3}{3}\right)$.

L'existence d'une solution périodique unique de l'équation (3) a été démontrée par M. Liénard [2]. Une telle solution correspond à une courbe

---

[1] B. VAN DER POL, *Ueber Relaxationsschwingungen* (*Zeitschrift für Hochfrequenztechnik*, 28, 1926, p. 178, et 29, 1927, p. 114).

[2] A. LIÉNARD, *Étude des oscillations entretenues* (*Revue générale d'Électricité*, 23, 1928, p. 901 et 946).

intégrale fermée (ou cycle limite) de l'équation du premier ordre

$$(4) \qquad \frac{dy}{z} = \frac{dz}{\varepsilon(1-y^2)z - y}.$$

En s'appuyant sur ce résultat on peut démontrer l'existence d'une solution périodique unique de l'équation (2). Celle-ci en effet correspond à l'équation

$$(5) \qquad \frac{dy}{z} = \frac{dz}{\varepsilon(1-y^2)z - y + k\left(y - \frac{y^3}{3}\right)},$$

et l'on voit aisément que la présence du terme supplémentaire ne modifie pas les relations de situation entre les courbes sphériques que considère la théorie de Poincaré.

4. On a donc ainsi l'explication complète, mathématique et physique, du phénomène observé.

L'étude précédente fournit une méthode simple de mesure de la résistance de fuite d'un condensateur, d'un emploi plus pratique que les méthodes habituelles.

PIÉZO-ÉLECTRICITÉ. — *Sur l'origine de la troisième fréquence fondamentale des quartz piézo-électriques oscillants.* Note de M. **Edgar Pierre Tawil**, présentée par M. Ch. Fabry.

On sait qu'un quartz piézo-électrique oscillant présente trois fréquences fondamentales. A première vue, ces trois fréquences semblent correspondre à des vibrations longitudinales se propageant suivant les trois dimensions du cristal ou plus exactement suivant trois directions principales, l'une parallèle à un axe binaire, l'autre normale aux axes binaire et optique, la dernière parallèle à l'axe optique.

Un examen plus attentif interdit l'hypothèse de vibrations dans cette direction, ayant pour origine un phénomène piézo-électrique. En effet, les lois de Curie stipulent qu'une pression exercée sur l'axe optique ne provoque *aucun* dégagement électrique et réciproquement qu'une différence de potentiel appliquée sur les faces piézo-électriques ne modifie pas la dimension de l'axe optique. De plus, tandis que les fréquences fondamentales des vibrations se propageant suivant la direction d'un axe binaire ou une direction perpendiculaire à cet axe sont en assez bon accord avec celles

calculées à partir de la formule de Newton, la troisième fréquence mesurée s'écarte de celle prévue de près de 25 pour 100.

En présence de ce dilemme, fallait-il admettre que l'axe optique ne subit aucune déformation?

J'ai déjà démontré ([1]) l'existence de vibrations suivant l'axe optique, sans toutefois préciser leur nature et leur origine. Je crois aujourd'hui pouvoir les attribuer à la réciprocité d'un phénomène que j'ai signalé récemment ([2]). En effet, j'ai indiqué, que si l'on fléchit un cylindre de quartz, dont la génératrice est parallèle à l'axe optique, on obtient un dégagement d'électricité de signes contraires aux extrémités d'un axe perpendiculaire à l'axe optique et à la direction de la force agissante et cela quelle que soit l'orientation du plan de flexion. Si donc, cas particulier de cette loi, on vient à fléchir l'axe optique, dans un plan contenant un axe binaire, on obtient un dégagement de signes contraires aux extrémités de l'axe binaire. Réciproquement si l'on applique une différence de potentiel aux extrémités de cet axe, c'est-à-dire de la façon usitée en piézo-électricité, on doit obtenir un fléchissement de l'axe optique. Cette hypothèse, quoique basée sur un phénomène direct, aurait gagné à être corroborée par la confrontation de la fréquence mesurée avec celle prévue. Malheureusement, le calcul de la fréquence des vibrations transversales se propageant dans un milieu anisotrope devient fort difficile quand il doit s'appliquer à un cristal libre et ayant la forme et les dimensions que l'on donne habituellement aux cristaux piézo-électriques.

Toutefois, si la fréquence en question est bien due à des flexions, il est évident que l'épaisseur et la longueur du cristal doivent intervenir.

Une constante qui, comme celle de Hund, ne ferait intervenir qu'une dimension ne saurait être valable que dans des cas exceptionnels. En se reportant aux Tables de Hund ([3]), qui indiquent la forme, les dimensions et les fréquences correspondantes des cristaux, on peut faire une constatation qui n'est peut-être pas due à un simple hasard. Tandis que pour les cristaux circulaires, dans lesquels les deux dimensions se trouvent suivant des diamètres, la fréquence mesurée, ramenée à l'unité de longueur, fournit une constante pratiquement invariable; cette constante devient impossible à établir avec des cristaux rectangulaires. Dans ce cas, en effet, les fréquences ramenées à l'unité de longueur varient considérablement.

([1]) *Comptes rendus*, **189**, 1929, p. 163.
([2]) *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 274.
([3]) *Proc. of Inst. of Radio Ing.*, **14**, IV, 1926.

OPTIQUE PHYSIQUE. — *Réalisation d'une lame quart d'onde pour l'ultraviolet à l'aide de quartz oblique.* Note de MM. G. **Bruhat** et J. **Thouvenin**, présentée par M. A. Cotton.

Nous avons étudié l'emploi comme compensateur quart d'onde dans l'ultraviolet d'un système formé de deux lames de quartz perpendiculaires à l'axe, l'une droite et l'autre gauche, que nous inclinons sur le faisceau lumineux. Les deux lames ayant des épaisseurs égales, l'étude du système d'après la théorie de Gouy montre que son action sur une vibration elliptique quelconque est la même que celle d'une lame biréfringente dépourvue de pouvoir rotatoire. Désignons par ρ et φ la rotation et la biréfringence produites par une des lames, et posons

$$\operatorname{tang}\alpha = 2\frac{\rho}{\varphi}, \qquad 2x = \sqrt{\varphi^2 + 4\rho^2};$$

appelons $4y$ la biréfringence de la lame composée, et ω l'angle que fait avec le plan d'incidence l'une des vibrations rectilignes qu'elle transmet sans altération. On obtient immédiatement sur la sphère de Poincaré les relations

$$\operatorname{tang} 2\omega = \sin\alpha \operatorname{tang} x, \qquad \sin 2\omega = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} y,$$
$$\sin y = \sin x \cos\alpha, \qquad \cos x = \cos 2\omega \cos y.$$

Pour les systèmes quart d'onde $\left(4y = \frac{\pi}{2}\right)$, ces formules permettent de calculer, en fonction de ω, les quantités α, x, ρ, φ; les tableaux ainsi dressés permettent, connaissant la valeur ρ de la rotation produite par l'une des lames pour une radiation donnée, de calculer la biréfringence φ, et par conséquent l'inclinaison i qu'il faut donner au système pour qu'il soit quart d'onde pour cette radiation.

Les lames que nous avons employées avaient chacune une épaisseur de $107\,\mu$; le système des deux lames était monté sur un double cercle divisé, permettant de faire varier et de mesurer l'inclinaison i et l'azimut du plan d'incidence. Placé entre deux glazebrooks, et éclairé par les diverses radiations fournies par un arc au mercure Gallois et un monochromateur double, il nous a bien donné les résultats prévus. L'appareil peut se régler instantanément, par variation de i, de façon à être quart d'onde pour la longueur d'onde employée, et les mesures d'ellipticité

peuvent être faites dans l'ultraviolet en employant la méthode de Senarmont.

Mais le système présente l'inconvénient *de n'être pas à champ normal :* tout déplacement angulaire du faisceau entraîne une variation de la position des lignes neutres, et les mesures dépendent du point du champ pour lequel on fait les pointés. Il ne peut donc être employé qu'avec un faisceau très peu divergent, et exige un réglage de mise en place particulièrement délicat. Aussi estimons-nous qu'il ne peut pas être utilisé à des mesures de précision ; il peut toutefois rendre des services, comme en ont rendu les nicols, si l'on accepte des erreurs de l'ordre d'une quinzaine de minutes sur les mesures d'ellipticités.

Nous décrirons en détail dans un autre Recueil les essais que nous avons effectués. Nous nous contenterons ici de donner les valeurs de l'incidence i qui rendent le système quart d'onde pour diverses radiations du spectre visible et du spectre ultraviolet ; la première ligne donne les valeurs calculées d'après les indices des Tables, la seconde donne les valeurs que nous avons déterminées expérimentalement en utilisant l'appareil à l'étude d'une vibration elliptique par la méthode de Stokes :

λ(Å)........	2537.	3128.	3657.	4358.	5461.
i calculé........	15°20′	17°22′	19°1′	20°56′	23°44′
i observé........	15.16	17.17	19	20.57	23.35

La concordance est aussi satisfaisante qu'on peut l'espérer : ces mesures vérifient donc bien la théorie de Gouy de la superposition de la biréfringence et du pouvoir rotatoire.

Les valeurs calculées pour i varient très peu lorsqu'on modifie la valeur admise pour la rotation ρ : la mesure de i ne nous apprend rien sur la question, encore insuffisamment éclaircie, de la variation du pouvoir rotatoire avec l'inclinaison du plan d'onde sur l'axe optique. Au contraire, l'azimut ω des lignes neutres, qui est voisin de $\frac{\rho}{2}$, dépend essentiellement de la rotation : c'est pourquoi nous avons déterminé les valeurs de cet azimut correspondant à diverses valeurs de l'incidence i pour une même longueur d'onde, $\lambda = 2653$ Å. Les mesures, conduites de façon à éliminer les erreurs de réglage, donnent les valeurs de 2ω avec une précision de 5 à 6 minutes. Le tableau suivant donne les valeurs observées de 2ω, puis les valeurs de $2\omega_1$ calculées en admettant que la rotation a la valeur constante $\rho_0 = 14°12'$, et enfin les valeurs de $2\omega_2$ calculées en admettant que la rotation est liée à l'angle r de

la normale à l'onde extraordinaire dans le quartz avec l'axe optique par la relation $\rho = \rho_0 \cos^2 r$:

i	7°52′	16°3′	20°12′	22°30′	24°26′
2ω	14.12	14.39	15.45	17.20	19.10
$2\omega_1$	14.15	15.3	16.34	18.14	20.34
$2\omega_2$	14.9	14.36	15.48	17.11	19.13
$2\omega_1 - 2\omega$	+3	+24	+49	+54	+84
$2\omega_2 - 2\omega$	−3	−3	+3	−9	+3

On voit qu'*il n'est pas douteux que la rotation produite par une lame de quartz perpendiculaire à l'axe, inclinée sur le faisceau lumineux, varie avec l'inclinaison, et doive être représentée par la formule* $\rho = \rho_0 \cos^2 r$.

ÉLECTRO-OPTIQUE. — *Sur la dissymétrie moléculaire.* Note de M. **R. de Mallemann**, présentée par M. A. Cotton.

J'ai montré, dans deux Notes récentes, comment la dissymétrie d'une molécule, et, plus généralement, d'un assemblage quelconque, pouvait être définie *quantitativement* par la valeur de l'*automoment* de polarisation. La dissymétrie est mesurée par le volume du tétraèdre construit sur les deux vecteurs équivalents au système formé par les polarisations atomiques. D'après le *théorème de Chasles*, cette grandeur est constante (pour chaque direction du champ) et égale à la somme des volumes de tous les tétraèdres qu'il est possible de former en combinant les vecteurs atomiques deux à deux. La dissymétrie moléculaire est ainsi définie par rapport à toutes les directions de l'espace; *elle varie avec la direction*. Du point de vue physique, il y a lieu de distinguer la *dissymétrie totale ou électrique*, correspondant à l'*ensemble* des couples de polarisation (anisotropes et rotatoires), et la *dissymétrie rotatoire ou optique*, définie par les seuls couples rotatoires; ceux-ci ont, en effet, un sens particulier qui modifie le caractère de la polarisation optique (ce qui n'est pas le cas des couples d'anisotropie). La dissymétrie optique d'une molécule est donc mesurée, dans chaque direction, par la valeur correspondante de l'automoment *rotatoire*, mais cette définition, si simple, est très condensée, et il est utile de la décomposer en éléments rapportés à des directions moléculaires fixes. Les couples rotatoires dépendent à la fois des susceptibilités vectorielles $\overrightarrow{d_{k,j}}$ (atomiques), et des distances interatomiques $r_{k,j}$ (longueurs des arêtes du polyèdre moléculaire); le couple

résultant s'exprime sous forme tensorielle, en fonction des *neuf* paramètres :

$$D_{xx} = \Sigma x\, d_{x}; \quad D_{xy}; \quad \ldots.$$

ces quantités sont les *neuf dissymétries optiques* de la molécule par rapport au trièdre moléculaire choisi (¹) (par exemple son trièdre principal). L'invariant

$$\Omega = \frac{1}{3}(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz})$$

mesure la dissymétrie moléculaire *moyenne* (²).

Dans le cas d'un *champ propagé par ondes* sinusoïdales, les deux vecteurs qui composeraient chacun des couples dans un champ uniforme ne sont plus rigoureusement égaux (en raison du diphasage); ces différences déterminent une *polarisation*, proportionnelle aux couples primitifs, qui s'ajoute (géométriquement) à la résultante principale; ce petit effet différentiel modifie la polarisation (expérimentale) des ondes transmises. D'autre part, les paramètres de direction ne sont plus ceux du champ, mais ceux de la *normale* à l'onde, α, β, γ, et la polarisation rotatoire (au sens précis qui vient d'être défini) dépend ainsi d'un vecteur qui est fonction de α, β, γ, et des neuf dissymétries D; c'est le *vecteur rotatoire* (³). En projetant ce vecteur sur la normale, et prenant la moyenne par rapport à toutes les directions possibles, on retrouve l'invariant Ω; la dissymétrie moléculaire moyenne est donc mesurée par le pouvoir rotatoire du fluide (pseudo-isotrope). Cette conclusion, entrevue depuis longtemps, mais d'une manière très vague, a maintenant un sens bien défini et précis.

(¹) Les couples rotatoires ont pour expression :

$$\vec{l} = \left[\left(\vec{d}, \vec{h}\right)\vec{r}\right] = \vec{h}(d, r) - \vec{d}(h, r);$$
$$L_x = \Sigma l_x = (D_{yy} + D_{zz})h_x - D_{xy}h_y - D_{xz}h_z, \quad \ldots.$$

L_x étant la composante, suivant Ox, du couple *résultant*, ce qui précise le sens physique des dissymétries.

(²) L'automoment *moyen* serait mesuré par l'invariant du bitenseur couple-polarisation, mais les définitions sont pratiquement équivalentes.

(³) Ces définitions ont été introduites il y a quelques années (*Ann. de Phys.*, 22, 1924, p. 192; *Comptes rendus*, 184, 1927, p. 1374). Mais je dois rectifier ici certaines indications antérieures : 1° le tenseur rotatoire n'est pas symétrique (tenseur + vecteur); les neuf dissymétries peuvent donc être réduites à *six* mais non à trois (en général); 2° le pouvoir rotatoire peut exister, *théoriquement*, dans les assemblages ayant *un seul plan de symétrie;* il s'annulerait normalement au plan de symétrie et, bien entendu, dans ce plan.

Les dissymétries d'une molécule quelconque peuvent être calculées en considérant successivement toutes les combinaisons tétraédriques possibles des atomes, il suffit donc d'indiquer leurs expressions générales pour un tétraèdre. Soient r_{jk} les longueurs des arêtes du tétraèdre; X_{jk}, Y_{jk}, Z_{jk} leurs projections sur trois axes rectangulaires, *a priori* quelconques (on doit conserver l'*ordre* des indices dans X, Y, Z : $X_{jk} = x_j - x_k, \ldots$). Posons

$$a_{jk} = \frac{3X_{jk}^2 - r_{jk}^2}{r_{jk}^5}, \qquad \beta_{jk} = \frac{3X_{jk}Y_{jk}}{r_{jk}^5}, \qquad \gamma_{jk} = \frac{3X_{jk}Z_{jk}}{r_{jk}^5}, \qquad \ldots,$$

les *six* coefficients tensoriels jk ($a_{jk} = a_{kj}, \ldots$) étant pris dans l'ordre a, β, γ; β, b, α; γ, α, c. Il y aura donc 36 coefficients distincts, puisque les doubles indices doivent être formés par les six combinaisons binaires des chiffres 1, 2, 3, 4. On obtiendra D_{zz}, par exemple, de la manière suivante :

$$D_{zz} = \Sigma z_j d_{zj} = \Sigma Z_{jk} \Sigma a_{lm} [(a_{km}\beta_{lj} - a_{lj}\beta_{km}) + (a_{kl}\beta_{mj} - a_{mj}\beta_{kl})].$$

Le facteur de Z_{jk} se compose de neuf crochets formés en combinant les lettres a, b, c, α, β, γ, 3 à 3, suivant un ordre déterminé par celui des coefficients tensoriels, les signes étant conformes à ceux des parenthèses et les doubles indices indiqués (soit toutes les combinaisons 2 à 2 des lettres j, k, l, m, *sauf* jk) (¹). La somme extérieure se forme en prenant comme doubles indices (Z_{jk} compris), toutes les combinaisons 2 à 2 de chiffres 1, 2, 3, 4. On aurait ensuite D_{zx} et D_{zy} en remplaçant Z par X puis Y. On passerait de D_{zz} à D_{xx} en conservant les lettres placées *devant* chaque *crochet* et permutant les lettres entre parenthèses (indices conservés) suivant l'ordre des coefficients tensoriels; de même pour passer de D_{xx} à D_{yy}. On obtiendrait ainsi les expressions des neuf dissymétries D. Chacune renferme 192 termes; l'invariant Ω, donc le *pouvoir rotatoire* d'un fluide formé de molécules *tétraédriques* (les plus simples possibles), serait ainsi la somme de 576 produits ternaires. Ce nombre peut être réduit très notablement par un choix convenable des axes de coordonnées, mais le calcul explicite serait néanmoins long et pénible. Une molécule réelle exigerait le calcul de plusieurs groupes tétraédriques et ceci en première approximation : on voit que le problème *général* de l'activité optique est, *pratiquement*, un des plus compliqués de toute la physique (²). On peut néanmoins contrôler les principes de la

(¹) Les composantes des susceptibilités vectorielles $\vec{d}$ suivant les arêtes du tétraèdre sont égales et de signes contraires; d'où $\Sigma z_j d_{zj} = \Sigma Z_{jk} d_{z(jk)}$.

(²) Cette complication résulte de la nature même du problème; des relations essen-

théorie en choisissant certains tétraèdres irréguliers dont la forme particulière annule un nombre considérable de coefficients, entre autres, le tétraèdre *trirectangle*. J'ai montré en 1925 que les *ordres de grandeur* ainsi calculés sont exacts.

MAGNÉTO-OPTIQUE. — *Sur le changement magnétique des raies d'absorption du peroxyde d'azote.* Note de MM. **Pierre Lambert** et **Ion Agarbiceanu**, présentée par M. A. Cotton.

Dans une Note récente (*Nature*, 128, 1931, p. 545), M. R. W. Wood résume des observations qu'il a faites sur l'influence du magnétisme sur le spectre de bandes de NO^2. M. Wood étudie le spectre de rotation magnétique qu'il obtient, comme on sait, en plaçant entre deux nicols le gaz absorbant soumis au champ magnétique. M. Wood a trouvé, comme il s'y attendait pour des raisons théoriques, une simplification du spectre produite par le champ magnétique ; il indique qu'un spectroscope plus dispersif serait nécessaire pour préciser les changements observés.

Or précisément nous avions, au mois d'avril de cette année, commencé à Bellevue, avec le grand électro-aimant, sur le conseil de M. Cotton une étude analogue en employant le spectre de premier ordre d'un réseau concave. Nous n'avions pas étudié, dans ces conditions, le spectre de rotation magnétique qui nous avait paru, avec cette dispersion, trop peu intense; nous avions simplement examiné les raies d'absorption formant le spectre avec ou sans champ, la lumière venant directement de la source et transmise par le tube normalement aux lignes de force traversant seulement un analyseur. La colonne de vapeur avait 11^{cm} de longueur. La pression était réglée en refroidissant une paroi du tube. Pour une température d'environ 6°C., la sensibilité de certaines lignes d'absorption au champ magnétique a été reconnue assez nettement sur des clichés photographiques du spectre. Par exemple une raie $5880 \pm 0,5$ Å, qui n'existe pas en dehors du champ, apparaît quand on excite l'électro-aimant, mais

---

tiellement dissymétriques ne comportent aucune réduction. D'autre part, toute approximation est interdite parce que les expressions à calculer sont des *différences* de termes du même ordre de grandeur. Enfin ces termes eux-mêmes ne peuvent être évalués actuellement que d'une manière très grossière, puisqu'ils dépendent des distances des atomes dans les molécules.

seulement dans le spectre des vibrations normales au champ, tandis qu'elle est invisible pour des vibrations parallèles au champ. On a observé aussi d'autres changements moins nets, il faudra pour les préciser que le travail soit poursuivi.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Étude du ferrite de glucinium et de l'oxyde ferrique provenant de sa décomposition.* Note ([1]) de MM. **H. Forestier** et **M. Galand**, présentée par M. Ch. Fabry.

Dans une récente Note ([2]) sur la structure des ferrites (Fe^2O^3MO), l'un de nous a montré que ces composés pouvaient avoir deux types de structure différents suivant que le rapport des diamètres de l'ion O à l'ion M de l'oxyde MO était supérieur à 0,96 (type hexagonal) ou inférieur à 0,62 (type cubique), leurs propriétés magnétiques étant liées à ces variations de structure. Le petit diamètre de l'ion glucinium nous conduisant à penser que l'on pourrait trouver pour le ferrite de glucinium un troisième type de structure, différent de ceux des autres ferrites ([3]), nous avons préparé et étudié cette nouvelle combinaison; en outre, nous avons pu mettre en évidence un oxyde ferrique attirable à l'aimant, provenant de la décomposition du ferrite, et étudier son mode de formation qui est voisin de celui de l'oxyde de Malaguti.

Le ferrite de glucinium a été préparé d'après la méthode générale indiquée antérieurement ([4]), par addition d'ammoniaque en excès au mélange équimoléculaire des solutions de chlorure de glucinium et de nitrate ferrique; les variations de propriétés magnétiques de ce composé, en fonction de la température, nous ont paru dès l'abord assez complexes, elles étaient dues, comme on va le voir, à la décomposition du ferrite au-dessous de 400°; sa courbe d'analyse thermomagnétique (*fig.* 1) montre que l'intensité d'aimantation à l'échauffement passe par un maximum à 480°, puis par un minimum à 620°, et enfin, indique le point de Curie du sesquioxyde de fer stable à 675°; au refroidissement, la courbe est identique à

([1]) Séance du 19 octobre 1931.

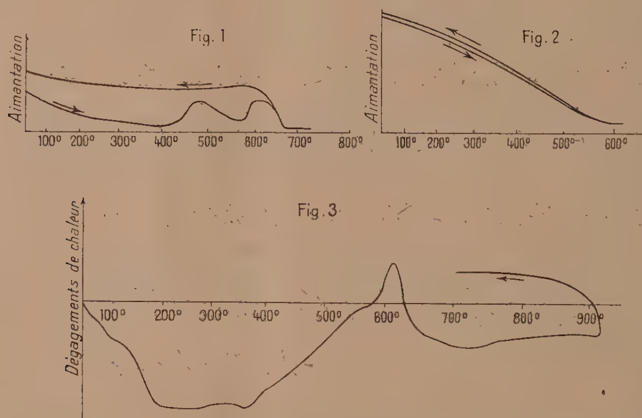
([2]) H. Forestier, *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 842.

([3]) V. M. Goldschmidt, *Forschritte d. Mineralogie, Krist. u. Petr.*, 15, 1931, p. 73.

([4]) H. Forestier, *Ann. de Chimie*, 10e série, 9, 1928, p. 316, et H. Forestier et G. Chaudron, *Comptes rendus*, 182, 1926, p. 777.

celle du sesquioxyde de fer stable, et le corps ne subit plus de transformation par la suite.

Des recuits de 2 heures, effectués sur le précipité, à différentes températures, nous ont montré, en effet, que l'on obtenait à partir de 400° un corps attirable à l'aimant — le corps n'est pas ferromagnétique au-dessous de cette température — ; lorsque la température dépasse 500° le coefficient d'aimantation commence à diminuer. Le corps obtenu par recuit entre 400° et 500° possède une courbe d'analyse thermomagnétique de forme particulière qui indique un point de Curie vers 580° (*fig.* 2) (à condition d'être effectuée assez rapidement pour éviter la transformation de ce corps entre 500° et 600°).



L'analyse thermique, effectuée au galvanomètre double Saladin-Le Chatelier, indique (*fig.* 3), après le départ d'eau adsorbée, une absorption de chaleur vers 360°, et un fort dégagement de chaleur vers 600°. La fin de l'absorption correspond au début de la formation du corps attirable à l'aimant, le début du dégagement au commencement de la transformation irréversible du produit avec perte du magnétisme.

L'apparition de Fe^2O^3 stable au-dessus de 630°, sur la courbe d'analyse thermomagnétique, montre que le ferrite de glucinium était dissocié en $Fe^2O^3 + GlO$. Or, la décomposition d'un tel corps n'a pu se faire qu'avec absorption de chaleur; il semble donc bien que le ferrite de glucinium — corps non ferromagnétique, formé à basse température — se décompose à 360°, en donnant un oxyde ferrique instable attirable à l'aimant, lequel se transforme vers 600° avec dégagement de chaleur, en oxyde ferrique stable

normal. Le produit de décomposition du ferrite de glucinium, se comporte donc de la même manière que les oxydes ferromagnétiques instables (oxydes de Malaguti et de van Bemmelen) étudiés par M. G. Chaudron et ses élèves (¹).

L'étude rœntgenographique (méthode Debye-Sherrer) du précipité de ferrite de glucinium, après recuit à diverses températures, nous a permis de constater tout d'abord que le diagramme donné par le précipité simplement desséché à 100° est différent de celui que donne un précipité de sesquioxyde de fer pur, préparé dans les mêmes conditions; par contre, il est analogue à celui que l'on obtient avec la lépidocrocite ($Fe^2O^3.H^2O$ orthorhombique, groupe V_h^1); ceci montre que la combinaison du sesquioxyde de fer et de la glucine est déjà faite après dessiccation à 100°. Le ferrite semble donc présenter une structure du type lépidocrocite, et non, comme on aurait pu s'y attendre, la structure de l'aluminate de glucinium (²) (chrysoberyl, orthorhombique, groupe V_h^{16}) qui est aussi celle de la gœthite ($Fe^2O^3H^2O$) (³). Il est à noter que la lépidocrocite donne, par déshydratation, de l'oxyde ferrique attirable à l'aimant, qu'il est impossible d'obtenir à partir de gœthite pure. Ce résultat montre que le ferrite de glucinium appartient bien à un type de structure différent de ceux des autres ferrites, comme nous le supposions au début de cette Note. Le spectrogramme du précipité recuit à 480° (ayant l'intensité d'aimantation maxima) est assez flou par suite de la grande finesse des grains du produit étudié; les raies que nous avons pu repérer coïncident avec les raies intenses de l'oxyde de Malaguti (cubique type Diamant).

Après recuit à une température supérieure à 630°, ce produit, dont la courbe d'analyse thermomagnétique est alors semblable à celle du sesquioxyde de fer rhomboédrique, donne un diagramme superposable à celui de ce sesquioxyde stable, avec quelques faibles raies supplémentaires correspondant à la glucine (le spectrogramme de celle-ci est beaucoup moins intense, à durée de pose égale, que celui de Fe^2O^3 rhomboédrique).

Cette étude nous conduit à formuler la conclusion suivante : le mécanisme de formation du sesquioxyde de fer attirable à l'aimant, à partir du ferrite de glucinium, est le même que celui de l'oxyde de Malaguti formé

(¹) Huggett et G. Chaudron, *Comptes rendus*, **186**, 1928, p. 1619; G. Chaudron et A. Girard, *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 97.

(²) W. L. Bragg et G. B. Brown, *Proc. Roy. Soc.*, *A*, **110**, 1926, p. 34.

(³) S. Goldsztaub, *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 533.

par déshydratation de certains hydrates de fer artificiels [1] et naturels [2]; l'atome de glucinium du ferrite jouant un rôle identique à celui de la molécule d'hydrogène dans l'hydrate $Fe^2O^3.H^2O$.

COLLOÏDES. — *Sur la contraction de volume produite par l'hydratation des protéines.* Note de MM. **Ch. Marie** et **N. Marinesco**, présentée par M. G. Urbain.

I. La dissolution d'une protéine ou d'un colloïde hydrophile dans l'eau s'accompagne presque toujours d'une assez forte contraction de volume. Katz [3] avait montré qu'il se produit simultanément un dégagement notable de chaleur et que le rapport entre la contraction de volume et le nombre de calories dégagées par gramme de substance dissoute est sensiblement le même pour des systèmes très variés mais dont l'agent de dispersion restait le même. Ainsi les globulines, l'hémoglobine, l'ovalbumine et l'amidon donnaient toujours un rapport, en centimètres cubes par petites calories, de l'ordre de 2.10^{-3} par gramme de corps sec en présence de l'eau pure. En fait, on peut montrer, par des mesures de polarisation diélectrique, que les micelles de ces colloïdes, chargées par électrisation de contact et par ionisation, condensent et compriment très fortement les molécules d'eau polarisées à l'état permanent [4] à tel point que la non-additivité de volumes peut être mise en évidence et déterminée par des mesures macroscopiques au dilatomètre ou au flacon à densité.

II. On sait que les propriétés physico-chimiques d'une protéine sont étroitement liées à la réaction du système ainsi qu'au point isoélectrique du corps dissous; cette liaison présente un gros intérêt théorique et pratique, ce qui nous a conduits à étudier la contraction produite par la gélatine isoélectrique de Merck en fonction du pH. Les mesures de contraction ont été faites soit par des lectures directes à l'aide d'un dilatomètre spécial [5],

---

(1) G. Chaudron et A. Girard, *loc. cit.*

(2) S. Goldsztaub, *loc. cit.*

(3) Katz, *Kolloidchem. Beihefte*, 9, 1918, p. 1.

(4) N. Marinesco, *Journ. Chim. phys.*, 2e série, 28, 1931, p. 52.

(5) Le dilatomètre employé sera décrit ultérieurement.

soit en déterminant le volume spécifique de 1g de colloïde solide ou gonflé, par la méthode du flacon à densité. D'abord, en conservant un pH aussi constant que possible, nous avons varié la concentration en gélatine et laissé gonfler ou dissoudre 1g de substance desséchée dans le vide à 25°, avec des volumes variables de solutions aqueuses acides ou basiques.

Dans ces conditions la contraction dv, rapportée au gramme de colloïde sec (de volume spécifique $0^{cm^3},724$), diminue rapidement quand la dilution augmente. Par exemple, dans une série de mesures à pH = 5,2, on obtient dv/gr = 29^{cm^3} en ajoutant 3^{cg} d'eau; ensuite pour une dilution plus grande, dv tend vers une limite inférieure correspondant à $0^{g},35$ d'eau. Le solvant introduit en plus ne produit plus aucune contraction, comme si les micelles arrivaient à une sorte de saturation d'hydratation. Seules les premières traces d'eau introduites dans le système sont contraintes, attirées dans l'atmosphère micellaire et hydratent les particules. Le phénomène présente le même aspect pour deux autres pH : 3,8 et 4,8. Néanmoins le système isoélectrique (de pH = 4,8) donne une contraction limite plus faible que les systèmes acides ou alcalins. Cette particularité est davantage mise en évidence dans une série de mesures où la dilution reste constante (1g gélatine + 1^{cm^3} d'eau), mais où le pH varie dans de larges limites. Comme l'indique le tableau suivant, la contraction provoquée par 1g de colloïde sec est minima au point isoélectrique, croît très rapidement pour les pH acides, plus lentement pour des milieux alcalins, où l'on observe un palier autour de la neutralité, suivi d'une montée plus rapide.

pH.	dv en mill. cubes par gramme de gélatine.
3,5	30,2
3,9	23,0
4,8	11,0
5,2	20,5
6,1	23,5
7,0	24,0
7,6	24,0
8,5	29,1

Nous n'avons pas trouvé un second minimum (moins prononcé) autour du point 7,7, particularité signalée pour d'autres propriétés [opacité (1)].

(1) Hyglay et Mathews, *J. Am. Chem. Soc.*, 46, 1924, p. 854.

Toutefois, il est remarquable que la contraction du système se trouve être minima au point isoélectrique (pH = 4,7) du colloïde; ici l'avidité des micelles pour l'eau est moins importante qu'ailleurs. En effet, la charge granulaire croît en valeur absolue par rapport à ce point, étant positive du côté acide et négative du côté alcalin; par suite, la force de compression diélectrique (1), autrement dit, le facteur d'hydratation micellaire varie de la même manière. Ceci nous permet d'expliquer par exemple les variations du gonflement et de la viscosité d'une protéine en fonction de la réaction du milieu, qui présentent, comme on sait, des minima très marqués au point isoélectrique. Dans le cas présent, le gonflement de la gélatine doit être nécessairement minimum pour un pH = 4,7 et varier comme l'attraction du colloïde pour le milieu dispersant. Quant à la viscosité d'un système dispersé, bien qu'exagérée par la rigidité, elle n'est qu'une fonction linéaire du volume réel ou total occupé par le corps dissous (Einstein), volume qu varie de la même manière et pour les mêmes causes que le gonflement.

En résumé, l'étude de la contraction de volume produite par la solvatation de la gélatine montre que de fortes compressions existent entre le milieu dispersant et les particules du corps dissous. La variation de cette contraction avec le pH permet d'interpréter le gonflement et la viscosité du même colloïde par rapport à son point isoélectrique.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur une Note de MM. Carrière et Janssens, relative au dosage du fluor.* Note de M. **P. Mougnaud**, présentée par M. H. Le Chatelier.

Nous avons montré (2) que le dosage du fluor, par précipitation de fluorure de calcium en milieu ammoniacal, présentait des causes d'erreur par excès, ayant atteint dans nos premières expériences 4,46 pour 100. Ce fait est dû à la précipitation de carbonate de calcium dont une partie provient du carbonate d'ammonium contenu dans l'ammoniaque mise en jeu, une autre portion étant formée au cours de l'expérience par action du gaz carbonique de l'air sur l'alcali libre. MM. Carrière et Janssens (3), qui ont proposé une méthode de dosage du fluor en milieu ammoniacal, ont évalué

(1) T. J. Webb, *J. Am. Chem. Soc.*, 48, 1926, p. 2589.
(2) P. Mougnaud, *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 1733,
(3) Carrière et Janssens, *Comptes rendus*, 193, 1931, p. 490.

expérimentalement la grandeur de ces erreurs qui, dans les conditions précises où ils se sont placés, correspondent à un excès de 2^{mg} pour la pesée correspondant à un dosage.

Il est évident que cette différence varie avec la teneur de l'ammoniaque en carbonate d'ammonium et avec la composition de l'atmosphère mise au contact des liquides pendant l'expérience. On peut utiliser de l'ammoniaque purifiée, et d'autre part éviter de chauffer avec un bec de gaz pour diminuer la contamination par le gaz carbonique de l'atmosphère. La cause d'erreur n'en subsisterait pas moins, et les dernières déterminations de MM. Carrière et Janssens ont bien confirmé notre précédente affirmation.

En répétant exactement l'expérience de ces auteurs, et en utilisant des échantillons d'ammoniaque provenant de différents laboratoires, nous avons obtenu des précipités qui, exprimés en chaux, correspondaient aux poids suivants $4^{mg},7$; $4^{mg},9$; $5^{mg},5$; $8^{mg},3$.

Si l'on considère que le dosage du fluor comporte une pesée de $0^{g},25$ de fluorure de calcium, l'erreur par excès peut donc atteindre, d'après ces expériences, et dans le cas le plus défavorable, 8/250, soit 3,2 pour 100. Cette différence est trop forte pour que la méthode soit acceptable.

D'autre part, suivant le mode opératoire des mêmes auteurs, les quantités d'eau mises en jeu sont relativement très élevées, et par suite interviennent des causes d'erreur par défaut qui peuvent être aussi importantes et compenser par le fait même les erreurs par excès signalées antérieurement.

Nous avons montré que le fluorure de calcium est soluble dans l'eau dans la proportion de $18^{mg},8$ par litre, et sa solubilité est plus élevée lorsqu'il est récemment précipité et non séché (22^{mg} par litre). MM. Carrière et Rouanet faisant intervenir en totalité 210^{cm^3} de liquide, le fluorure perdu par dissolution correspond à $4^{mg},6$ environ. On voit ainsi que cette valeur est du même ordre de grandeur que les erreurs par excès signalées plus haut, ce qui explique très suffisamment que ces auteurs aient pu obtenir dans leurs premières recherches des résultats très concordants.

Nos expériences n'ont d'ailleurs fait que confirmer et préciser les faits apportés par Henri Rose (¹), et qui peuvent être résumés par la phrase suivante extraite de son Ouvrage :

« Pour de petites quantités de fluor, cette perte si forte (par solubilité) pourrait souvent sembler compensée par cette circonstance que l'on obtient du fluorure de

---

(¹) H. Rose, *Traité de Chimie analytique*, Paris, 1862, p. 760.

calcium qui est mélangé de carbonate de chaux, ce qui vient de ce que l'on ne s'est pas préservé du contact de l'air avec assez de soin. »

La méthode de dosage du fluor par précipitation du fluorure de calcium en milieu ammoniacal est donc trop imprécise pour être admise.

CHIMIE APPLIQUÉE. — *Reconstitution de la technique picturale de Jean Van Eyck.* Note de M. **Jacques Maroger**, présentée par M. M. d'Ocagne.

Les procédés modernes de peinture utilisent l'huile de lin crue pour broyer et diluer les couleurs; la touche de pinceau est opaque, couvrante et glissante. Ces obstacles sont insurmontables pour la réalisation d'une technique picturale se rapprochant de celle des belles époques.

L'idéal, pour un peintre, est d'avoir un véhicule ne séchant pas trop vite, tout en permettant la superposition, la fixité et l'onctuosité.

Jean Van Eyck, mécontent de la technique à l'huile de lin crue, par sa siccativité trop lente (technique déjà connue au XIIe siècle), mécontent des techniques à la colle ou à l'œuf, à cause de leur siccativité trop rapide, eut sans doute l'idée de fondre ces deux principes en un seul, d'où la nouvelle peinture dite à l'huile qui dura environ quatre cents ans.

Le secret de cette composition, que nous croyons avoir retrouvé, repose sur l'emploi d'une émulsion. L'intérêt de l'émulsion est de donner au vernis une consistance, une onctuosité qui le rendent d'une utilisation plus pratique, en ajoutant à la touche une transparence que l'huile seule était incapable de lui donner.

Mais pour conférer à cette émulsion une certaine stabilité, il est important d'y adjoindre une colle (gomme arabique ou colle de peau). Cette colle fixe mieux la touche sur le support.

La formule qui, à la suite de nombreux essais, nous à fourni les meilleurs résultats est la suivante : huile de lin de pays de première extraction, siccativée de 3 à 6 pour 100 par de la céruse calcinée, de la litharge et de la terre d'ombre, en parties égales. Cuire à feu doux jusqu'au roussissement de l'écume.

Les sels de plomb et de menganèse doivent, par des phénomènes catalytiques, assurer la viscosité et la siccativité. La chauffe peut être limitée, et à température élevée, ou prolongée, mais à température plus basse.

Cette huile cuite s'additionne d'une résine (une à deux parties d'huile pour une de résine), on obtient alors le vernis.

Pour obtenir l'émulsion, il suffit de mélanger le vernis avec la gomme arabique dans un mortier (proportions variables suivant les besoins). Introduire l'eau goutte à goutte, en malaxant jusqu'à la consistance désirée.

A ses qualités de fixité cet onguent joint une transparence due à l'émulsion. De plus sa fixité permet des superpositions sans glissement, qu'aucun des procédés actuels ne peut réaliser.

Nous croyons pouvoir affirmer que cette formule se rapproche sensiblement de celle de Jean Van Eyck. Car si l'onguent permet la réalisation des techniques picturales dont nous avons apprécié la similitude au cours de nos travaux de restauration, il nous a été donné d'observer les particularités suivantes qui sont une confirmation de notre opinion. Selon que le fixateur est la gomme arabique ou la colle de peau, l'onguent obtenu nous permet des réalisations picturales homologues à l'école flamande ou à l'école italienne. Or, avant la découverte de Jean Van Eyck, les enluminures flamandes étaient peintes à la gomme arabique, les italiennes à la colle de peau.

En résumé, ce procédé peut être regardé comme une reconstitution de celui, autrefois courant, et qui aurait complètement disparu dès avant le début du XIXe siècle.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Recherches sur le champ électrique de l'air en Djesireh.* Note de M. **Jean Chevrier**, présentée par M. Maurain.

Ces mesures ont été effectuées les 21, 22, 25 juillet, 14, 15, 16, 17, 21 et 22 août, au voisinage du terme Sud de la nouvelle base géodésique — 12^{km} au nord d'Hassetché — région désertique sans relief sensible (altitude 200^m environ).

L'égaliseur à ionium, placé à 1^m au-dessus du sol, était relié à un électroscope universel de Wulf par un fil fin d'une dizaine de mètres de longueur. En principe à chaque heure, de 5^h à 17^h (T.U.), j'ai fait 10 lectures à 30 secondes d'intervalle chacune et adopté, par champ calme, leur moyenne comme valeur du potentiel à l'heure correspondante.

Le petit nombre des observations et surtout les énormes perturbations locales du champ ne permettent pas de donner l'allure de la variation diurne. Je remarquerai simplement que le champ est calme au début et à la fin de la journée, avec des valeurs un peu plus élevées le soir que le matin.

La moyenne de 43 séries de 10 observations par champ calme est faible : 40 volts environ.

Toute cause capable d'agiter la poussière, vent, passage de troupeaux et d'autos, etc., renverse le signe habituellement positif du champ et porte le potentiel à des valeurs négatives élevées. Les détails du phénomène, étudiés spécialement les 21 et 22 août, sont en accord étroit avec les observations de H. Pollet en Chine (*Comptes rendus*, 188, 1929, p. 406).

Le 16 août, alors que la visibilité qui d'ordinaire s'étend à une centaine de kilomètres était réduite à quelques centaines de mètres par un brouillard de sable, j'ai pu tirer de la borne de l'électromètre des étincelles de quelques millimètres de longueur, indice d'un champ très élevé et d'ailleurs négatif.

De six séries de dix observations comparatives faites les 21 et 22 août, il résulte que la valeur moyenne du gradient par champ calme, passe de 42 à 70 volts, quand on élève l'égaliseur radioactif de 1 à 2^m au-dessus du sol.

CRYPTOGAMIE. — *Les cristaux protéiques chez quelques espèces marines du genre* Cladophora. Note de M. **E. Chemin**, présentée par M. L. Mangin.

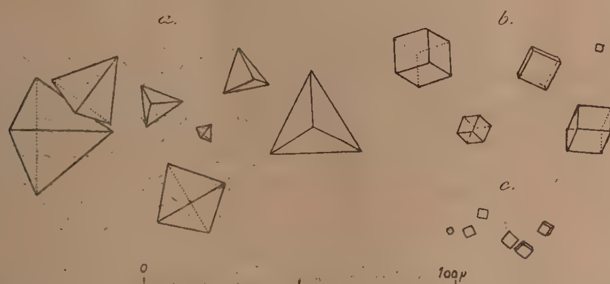
Des cristalloïdes ont été signalés et décrits par J. Klein [1] dans un certain nombre d'Algues marines, Floridées et Chlorophycées, parmi lesquelles une seule espèce de *Cladophora : Cl. prolifera*. Les recherches ont été faites le plus souvent, et en particulier pour cette dernière espèce, sur du matériel d'herbier. La dessiccation, obtenue par la pression, peut entraîner des déformations et des changements de coloration comme le reconnaît l'auteur lui-même qui regrette de n'avoir pu se procurer des spécimens frais.

J'ai observé des cristaux, non seulement dans *Cladophora prolifera* (Roth) Kütz, mais encore dans *Clodophora pellucida* (Huds) Kütz et *Cladophora rupestris* (L.) Kütz. Mes recherches ont été faites sur de nombreux individus vivants récoltés à Saint-Servan en septembre. J'ai examiné en outre quelques spécimens séchés, de provenance diverse, uniquement pour m'assurer que l'existence de ces cristaux n'était pas particulière à une station déterminée. Je vais les décrire, en indiquer la nature et le rôle probable.

---

[1] J. Klein, *Die Kristalloïde der Meeresalgen* (*Pringsheim's Jahrbücher Botanik*, 13, 1882, p. 23-24).

Description. — Un rameau de *Cl. pellucida*, sectionné dans l'eau de mer, laisse échapper, par la surface de section, un suc cellulaire visqueux qui entraîne avec lui un grand nombre de cristaux. Le même fait s'observe chez *Cl. prolifera* et *Cl. rupestris*, mais, surtout pour cette dernière espèce, dont les rameaux sont plus fins, il faut exercer une légère pression, et, avec le suc cellulaire, il y a sortie d'une partie du protoplasme et des chromotophores.



Cristaux protéiques chez : *a, Cladophora pellucida; b, Cladophora prolifera; c, Cladophora rupestris.*

Les cristaux sont régulièrement tétraédriques chez *Cl. pellucida* (*fig. a*); leur taille est variable : la longueur de l'arête va de 5 μ jusqu'à 35 et exceptionnellement 40 μ. Dans les deux autres espèces ils sont cubiques; les arètes sont vives chez les plus petits et souvent légérement arrondies, comme dans les dés à jouer, chez les plus gros. Leur taille diffère suivant l'espèce : dans *Cl. prolifera* (*fig. b*) la longueur de l'arête peut atteindre 15 μ et parfois 20 μ, alors que dans *Cl. rupestris* (*fig. c*) elle ne dépasse 6 μ, les plus petits étant à peine mesurables. Tous ces cristaux sont généralement isolés; ils sont parfois groupés par 2 ou 3 s'accolant par une de leurs faces sans fusionner.

Ils se rencontrent dans tous les articles, depuis la base jusqu'au sommet, et à peu près en même abondance. On peut les observer dans les articles non sectionnés, sur une vue de face, lorsque les chromatophores ne sont pas trop serrés; ils sont situés dans le suc cellulaire au voisinage de la couche protoplasmique pariétale sans relation directe avec les chromatophores.

Ils ont été vus sur tous les spécimens vivants qui ont été examinés. Je les ai observés également sur des échantillons d'herbier rapportés de stations diverses et récoltés à divers moments de l'année : *Cl. pellucida* de Luc-sur-Mer en mars, des îles Chausey en avril, de Saint-Jean-de-Luz en septembre; *Cl. prolifera* de Saint-Suliac en avril, de Guéthary en septembre, de Tunisie

en janvier; *Cl. rupestris* de Luc-sur-Mer en avril, des îles Glénans en septembre.

Leur existence ne dépend donc ni de la période de végétation, ni de la station; par leur forme comme par leur taille ils doivent être considérés comme une des caractéristiques de chaque espèce. C'est en essayant de déterminer de jeunes pousses de *Cl. pellucida* non encore ramifiées, que mon attention a été attirée sur eux. Ils ne se trouvent pas d'ailleurs chez tous les *Cladophora*; je ne les ai vus ni chez *Cl. utriculosa* Kütz, ni chez *Cl. repens* (J. Ag.) Harv.

Nature. — Tous ces cristaux sont transparents et incolores; la couleur brunâtre des gros cristaux de *Cl. prolifera*, signalée par J. Klein, doit être une conséquence de la dessiccation. En lumière ordinaire, les faces fortement inclinées, dans les tétraèdres comme sur les cubes, présentant des stries horizontales.

Ils ne sont pas altérés par les acides (HCl, SO^4H^2, NO^3H).

Dans une solution alcaline ils gonflent, se déforment et disparaissent.

Une solution iodo-iodurée leur donne une teinte jaune.

Avec l'éosine ils prennent une couleur rouge.

Ils prennent une coloration jaune avec l'acide nitrique, coloration accentuée par l'addition d'ammoniaque (réaction xantho-protéique).

Ils prennent la teinte violette, caractéristique du biuret, après imprégnation du sulfate de cuivre à 2 pour 100 et action d'une solution de potasse à 10 pour 100.

Après l'action du tanniu à 1 pour 100 dans de l'acide acétique à 30 pour 100 pendant vingt minutes, l'addition de perchlorure de fer leur communique une teinte bleue noirâtre (réaction Turchéni-Derrien).

Ces réactions ont été faites sur lame et observées au microscope. La coloration avec le réactif de Millon n'a pu être obtenue à cause du précipité que donne ce réactif avec l'eau de mer. Si toutes ces réactions sont de valeur inégale, il en est, comme la réaction du biuret, qui sont suffisamment caractéristiques; en outre leur concordance, dans l'ensemble, permet d'affirmer que les cristaux sont de nature protéique. Ils ne sont vraisemblablement pas tous constitués d'une même substance puisque la forme cristalline varie.

Rôle. — Ces cristaux proviennent manifestement de l'activité cellulaire. Comme ils ne sont pas en rapport direct avec les chromatophores, il est difficile d'admettre qu'ils sont de même origine que les pyrénoïdes; ceux-ci d'ailleurs se rencontrent indifféremment dans les *Cladophora* pourvus de

cristaux et dans ceux qui en sont dépourvus. On peut les considérer comme le résultat d'une sorte de sursaturation du suc cellulaire en substances protéiques.

Sont-ils susceptibles d'être utilisés ultérieurement par la plante? J. Klein signale que, chez *Acetabularia*, les cristalloïdes n'existent que dans les exemplaires qui n'ont formé aucune spore, et qu'ils manquent dans les exemplaires en voie de sporulation. J'ai cherché vainement, en septembre, des individus en état de reproduction. Il est probable que les cristaux disparaissent dans les articles où se forment les spores et sont utilisés dans la formation de celles-ci; mais, il est douteux que tous les cristaux de la plante y participent; dans la majeure partie de l'Algue, ils doivent rester inutilisés. Ils représentent une matière de réserve occasionnelle.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Action de la température sur le noyau et la karyokinèse chez* Vicia Faba. Note de M. **A. Famin**, présentée par M. M. Molliard.

De nombreux auteurs ont étudié cette question. Prillieux [1], dans des conditions mal définies et à des températures qu'il ne mesure pas, constate une hypertrophie ainsi qu'une pluralité, par cellule, des noyaux. Sabline [2] reprend la question, mais à des températures trop distantes les une des autres (7°, 10°, 30°, 40°) : il constate que le nucléole se fragmente, qu'il y a quelques modifications, obscurément expliquées, dans la mitose. Lundegardh [3], et à sa suite, Sakamura [4], toujours dans des conditions trop différentes les unes des autres, observent essentiellement un raccourcissement et un épaississement des chromosomes. Yamaha [5] étudie à la

---

(1) Prillieux, *Altération produite dans les plantes par la culture dans un sol surchauffé* (*Ann. Sc. nat. Bot.*, 10, 1879, p. 347-349).

(2) Sabline, *L'influence des agents externes sur la division des noyaux dans la racine de* Vicia Faba (*Rev. gén. Bot.*, 15, 1903, p. 481-487).

(3) Lundegardh, *Zur Mechanik der Kernteilung* (*Svensk. Bot. Tidskr.*, 8, 1914, p. 167 et suiv.).

(4) Sakamura, *Experimentelle Studie über die Zell und Kernteilung, mit besonderer Rücksicht auf Form, Grösse und der Zahl der Chromosomen* (*Journ. Coll. Sc. Imp. Univ. Tokyo*, 39, 1920, p. 1-219).

(5) Yamaha, *Ueber die Wirkung des distillierten Wasser auf die Wurzelspitze von* Vicia Faba *bei verschiedenen Temperaturen* (*Journ. Coll. Sc. Imp. Univ. Tokyo, Bot.*, Section III, 2, 1927, p. 215-296).

fois l'action de l'eau distillée et de la température sur les pointes de racines de *Vicia Faba*, mais on ne peut séparer ce qui appartient à chacun de ces deux facteurs.

Je me suis proposé de préciser, en les complétant, les travaux de ces auteurs. Le matériel d'étude a été le même : *Vicia Faba*.

Les graines, préalablement stérilisées, et ensemencées suivant la méthode préconisée par Molliard [1] et Combes [2], ont été cultivées sur du liquide de Knop dilué au 1/20 par de l'eau distillée. Les conditions extérieures (lumière surtout) ont été les mêmes, ainsi que les précautions d'asepsie ; seule, la température a varié.

Dans une première série d'expériences, les graines ont effectué leur développement entier dans une étuve vitrée, à température constante, soit 32°, 34°, 36° et 38° C.

Dans une seconde série, des plantules vigoureuses, âgées d'une dizaine de jours et ayant vécu à 20-22°, étaient soumises à des températures définies pendant 36 heures : 30°, 32°, 34°, 36°, 38°, 40°, 50° et 60°.

L'extrémité de la racine et le bourgeon terminal de chaque embryon ou plantule étaient fixées au mélange de Helly ou à celui de Meves, et les coupes colorées à l'hématoxyline de Heidenhain.

Les résultats observés ont été les suivants :

Germinations. — Au-dessus de 38°, il n'y a pas eu de germination au sens ordinaire de ce mot.

A 20-22°, le noyau au repos présente un réseau très fin et un ou deux nucléoles qu'aucune auréole périnucléolaire ne sépare de ce noyau.

Les mitoses sont nombreuses et offrent les figures décrites soigneusement par Sharp [3]; racine et tige ne montrent aucune différence.

Jusqu'à 32°, aucune modification ne survient, soit dans le noyau quiescent, soit dans les phases de la division cellulaire.

A 32°, le nombre relatif des karyokinèses diminue nettement.

Le réseau du noyau au repos apparaît plus clairement.

Quelques plaques équatoriales seulement sont anormales : les chromosomes en sont déformés, se séparent mal et sont plus épais qu'à la tempéra-

---

(1) Molliard, *Action morphogénique de quelques substances organiques sur les végétaux supérieurs* (*Rev. gén. Bot.*, 19, 1907, p. 243).

(2) Combes, *Recherches biochimiques expérimentales sur le rôle physiologique des glucosides des végétaux* (*Rev. gén. Bot.*, 30, 1918, p. 236-237).

(3) Sharp, *Somatic chromosoms in* Vicia (*La Cellule*, 29, 1913, p. 295-330).

ture ordinaire. Leur clivage est souvent observable, mais, fréquemment les éléments-fils ont l'aspect de cordes à nœuds.

A 34°, ces modifications s'accentuent. Une auréole périnucléolaire apparaît; le nombre des karyokinèses diminue encore et un grand nombre d'entre elles ne sont pas normales. La prophase se reconnaît, mais le filament chromatique se fragmente prématurément et irrégulièrement. Quelquefois, la membrane nucléaire persiste et la chromatine prend l'aspect de masses rubanées, de tailles variables, disposées à la surface du noyau. Quelques métaphases se reconnaissent également, ainsi que des débuts de clivage : la séparation est généralement incomplète et les chromosomes plus ou moins mamelonnés. Parfois, le nucléole se mamelonne lui aussi et prend une apparence mûriforme.

A partir de 36°, aucune mitose n'a pu être observée, malgré des essais répétés, et contrairement à ce qu'affirme Lundegardh, qui opéra, il est vrai, dans des conditions non aseptiques. L'auréole périnucléolaire s'accroît, le noyau contient de nombreux granules chromatiques sur un substratum granuleux. La division nucléaire est donc arrêtée dès son tout premier stade. Le nucléole se fragmente en globules sphériques de tailles variées. Quelquefois, le noyau dégénère en une masse irrégulière, recouverte d'une croûte discontinue de chromatine.

A proprement parler, il n'y a donc pas de germination au delà de 36°, mais seulement, sans doute, une imbibition des tissus embryonnaires secs.

Jeunes plantules. — Les effets de la température sur le noyau ne sont visibles qu'à partir de 34°.

Les noyaux au repos, mesurés dans des régions comparables (parenchyme cortical de la racine et parenchyme foliaire), présentent une augmentation de taille, puis une diminution, avec un maximum à 36°.

Le nucléole se mamelonne à 38°, se fragmente à 40°; il se vacuolise à 50° et 60°.

Les chromosomes, normaux jusqu'à 34°, deviennent ensuite très irréguliers, plus longs ou plus courts jusqu'à 20°, et toujours beaucoup plus épais. Ils sont souvent, à partir de 38°, réunis par groupes difformes, et non individualisés. Les déformations s'accentuent quand la température s'élève, et à 60°, ils se vacuolisent extrêmement et sont difficiles à reconnaître.

Les phases de la mitose sont inégalement atteintes. Ce sont les télophases qui le sont d'abord : à 36°, on trouve des noyaux-frères réunis par un filament chromatique ou par une ligne discontinue de grains de chromatine. Il en est de même à 38°, et il n'est pas rare de trouver de jeunes cellules

séparées par des cloisons incomplètes. A cette dernière température, peu de chromosomes se clivent; généralement, ils s'étalent dans le protoplasme plus fluide, et peuvent occuper tout l'espace cellulaire : l'anaphase et la métaphase sont touchées à leur tour.

A 60°, seules quelques prophases sont respectées.

Donc la température agit sur le noyau au repos en accentuant son aspect réticulé, puis en le rendant granuleux. Sa taille maxima est atteinte à 36°.

Il n'y a pas de division cellulaire au delà de cette même température, qui est une température critique pour la plante, celle où elle cesse de germer, et où nucléole et chromosomes présentent des déformations considérables.

L'action de la chaleur sur le noyau est, en définitive, la même, bien que les échantillons étudiés aient été d'âges différents. Que la plante soit au début de sa vie ou bien développée, les troubles observés affectent sensiblement la même allure, et les effets sont identiques quand les températures sont égales, au moins jusqu'à 38°.

CHIMIE VÉGÉTALE. — *Sur la constitution de l'asébotoside (asébotine). Son identité avec le phlorizoside (phlorizine).* Note de M. **Marc Bridel** et Mlle **A. Kramer**, présentée par M. L. Mangin.

L'asébotoside (asébotine) est un glucoside qui a été extrait, en 1883, par Eykmann des feuilles d'*Andromeda japonica* Thunb et retrouvé, en 1912, par Em. Bourquelot et Mlle A. Fichtenholz dans les feuilles de *Kalmia latifolia* L. En 1930 M. Bridel a montré que ce glucoside était hydrolysable par l'émulsine des amandes et devait être rangé dans la classe des glucosides β, hydrolysables par la glucosidase β. L'étude de la constitution de l'asébotoside n'étant qu'ébauchée, nous l'avons reprise et nous avons obtenu les résultats suivants :

L'asébotoside cristallise en prismes allongés, transparents, contenant 7,1 pour 100 d'eau de cristallisation. Son pouvoir rotatoire, en solution dans l'alcool à 50°, est $\alpha_D = -54°,09$.

Il fond nettement au bloc Maquenne à +137°,5.

Il est hydrolysé par l'acide sulfurique à 5 pour 100 en donnant 42,46 pour 100 de glucose et 62,90 pour 100 de produit non glucidique, cristallisé, l'asébogénol (asébogénine d'Eykmann).

Par hydrolyse au moyen de l'émulsine, on obtient 39,54 pour 100 de

glucose. Le produit non glucidique qui se forme en même temps est identique à l'asébogénol obtenu par hydrolyse acide.

L'asébotoside répond à la formule $C^{21}H^{24}O^{10}$, identique à celle du phlorizoside et différente de la formule proposée por Eykmann.

L'asébogénol, préparé par hydrolyse sulfurique, cristallise en aiguilles brillantes, à saveur un peu sucrée. Il fond à + 274°. Son poids moléculaire a été trouvé de 272,5 et il répond à la formule $C^{15}H^{14}O^{5}$ qui est celle du phlorétol (phlorétine), produit d'hydrolyse du phlorizoside.

Par hydrolyse barytique, à + 115°-120°, l'asébogénol fournit un polyphénol, le phloroglucinol et un acide-phénol, l'acide *p*-hydrocoumarique, composés que donne également le phlorétol dans les mêmes conditions.

Ainsi les formules de l'asébotoside et de phlorizoside d'une part, celles de l'asébogénol et du phlorétol d'autre part, sont identiques; le phlorétol et l'asébogénol donnent les mêmes produits d'hydrolyse barytique.

Quelques propriétés physiques et chimiques du phlorizoside, que l'on trouve dans la littérature, ne concordent pas avec les propriétés de l'asébotoside qui viennent d'être établies. On pourrait penser, en conséquence, non pas à une identité entre le phlorizoside et l'asébotoside, mais à une simple isomérie due, par exemple, à ce que l'oxhydryle du phlorétol lié au glucose ne serait pas le même dans le phlorizoside que dans l'asébotoside.

Eykmann avait d'ailleurs conclu à la non-identité de ces deux principes immédiats.

Mais, pour affirmer que l'on avait bien affaire à deux isomères et non pas à un seul et même principe immédiat, il nous a paru nécessaire de faire une étude comparative complète du phlorizoside et de l'asébotoside.

Cette étude comparative a été effectuée sur deux produits purs, préparés par nous-mêmes et cristallisés dans les mêmes conditions. Elle prouve d'une façon indiscutable qu'il y a identité complète entre le glucoside extrait des feuilles de *Kalmia latifolia* L. (asébotoside) et le glucoside extrait des écorces de pommier et de poirier (phlorizoside).

La constitution de ce glucoside ayant été déterminée sur le phlorizoside et sur son produit d'hydrolyse, le phlorétol, on doit conserver ces noms au glucoside et au produit non glucidique qui en dérive.

Il s'ensuit que le nom d'asébotoside (asébotine d'Eykmann) et celui d'asébogénol (asébogénine d'Eykmann) qui désignent les principes connus sous les noms de phlorizoside (phlorézine) et de phlorétol (phlorétine) doivent disparaître de la nomenclature chimique.

On doit dire maintenant que le phlorizoside existe non seulement dans

les écorces d'un certain nombre d'arbres de la famille des Rosacées (pommier, poirier, etc.), mais encore dans les feuilles et les fleurs de deux plantes de la famille des Éricacées, *Andromeda japonica* Thunb et *Kalmia latifolia* L.

Il est intéressant de faire ressortir que le phlorizoside qui, jusqu'ici, était regardé comme un principe spécifique de l'écorce de quelques Rosacées se rencontre également dans les feuilles et les fleurs de denx Éricacées, famille très éloignée des Rosacées au point de vue botanique.

Cela prouve qu'il n'existe guère de rapports entre les caractères botaniques et la composition chimique des plantes. D'autres exemples récents, notamment ceux que l'on tire de la répartition dans le règne végétal du monotropitoside, de l'aucuboside, de l'arbutoside et du picéoside, viennent renforcer cette opinion.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Analogies entre le développement de la plantule et la poussée annuelle des feuilles, chez les Liliiflores.* Note de M. **Pierre Chouard**, présentée par M. Louis Blaringhem.

Au cours de l'année 1931, j'ai pu étendre l'étude comparée des plantules et des bourgeons à environ 120 espèces de Liliacées, Colchicacées, Amaryllidées et Iridées, suivies sur le vivant grâce aux ressources du Service de Culture au Muséum et de la Villa Thuret à Antibes. Toutes mes observations ont confirmé celles de l'année précédente qui n'avaient porté que sur une trentaine d'espèces (1).

J'avais montré en effet, sur des exemples pris chez les Scilles et chez les Jacinthes, que les premières feuilles constituant la plantule offrent une analogie frappante, dans leur forme, leurs dimensions relatives et leur succession, avec les pièces foliaires qui apparaissent chez l'adulte au cours de chaque période végétative.

Un exemple démonstratif est donné par la Jacinthe des Bois (*Endymion nutans* Dum.) et par *Scilla bifolia* L. La plantule d'*Endymion* est formée d'un cotylédon hypogé, blanc, mince, longuement engainant, d'où s'échappe une première feuille à limbe vert et à base tubérisée. Parallèlement, chez la plante adulte, le bulbe produit, au printemps, d'abord une à trois gaines blanches, minces, longuement engainantes, puis des feuilles à limbe vert et à base tubérisée. Au contraire, chez *Scilla bifolia*, la plantule

(1) Cf. P. Chouard, *Thèse*, *Paris*, 5 novembre 1930, et *Ann. Sc. nat. Bot.*, 10e série, 13, 1930, p. 131-323.

est formée d'un cotylédon épigé, foliacé, vert, cylindrique, formant gaine très courte, et tubérisé à la base. Parallèlement, le bulbe adulte produit chaque année des feuilles à limbe vert et à base tubérisée, apparaissant d'emblée. Chez les bulbes encore jeunes, ces feuilles sont même cylindriques et leur aspect est presque identique à celui du cotylédon foliacé.

Voici un choix de quelques exemples nouveaux :

Le cycle foliaire de *Brimeura* (= *Hyacinthus*) *fastigiata* (Bert.) Nob. de Corse, débute par une gaine très mince et très fugace qui avait échappé aux botanistes descripteurs. Par analogie avec *B. amethystina* (L.) Salisb. des Pyrénées, j'en avais conclu (¹) que la plantule devait être à cotylédon hypogé, mince et longuement engainant, ce que l'expérience a ensuite entièrement vérifié. Il en est de même chez les *Narcissus*, *Leucoium*, *Galanthus*.

Les *Eremurus* et *Asphodelus* adultes offrent, à l'origine du cycle foliaire, des gaines minces, blanches ou roussâtres. Les plantules offrent de même un organe mince et engainant, formé ici par une sorte de ligule qui surmonte le cotylédon proprement dit. Le même dispositif et la même analogie se retrouvent chez *Colchicum* et *Merendera*.

Chez les *Bellevalia*, où il n'y a jamais de gaine, la première feuille est la plus grande, les suivantes allant en décroissant. De même les plantules offrent deux pièces foliacées dont la première, le cotylédon épigé, est beaucoup plus développée que la feuille qui suit.

Au contraire, chez *Hemerocallis*, les pièces du cycle foliaire sont de plus en plus longues, les premières n'étant même que de courtes gaines foliacées. Les plantules se composent de 3 ou 4 pièces de plus en plus grandes : un cotylédon en forme de très courte gaine hypogée, une première feuille en forme de gaine virescente, enfin des feuilles normales.

L'allure de la taille dans le cycle foliaire est encore marquée de même dès la plantule chez *Scilla peruviana* L. Dans cette espèce, dépourvue de gaine, la plus grande feuille, et la plus grande écaille correspondante, est la deuxième ou troisième du cycle. La plantule se compose d'un cotylédon courtement engainant formant une première écaille tubérisée, puis d'une feuille verte à base tubérisée plus grande, enfin d'une dernière feuille beaucoup plus réduite.

Dans d'autres cas, comme chez *Hæmanthus Catharinæ* Hort. Thur., ce sont jusqu'aux détails de l'appareil foliaire adulte qui apparaissent en miniature dans le cotylédon et les premières feuilles de la plantule : gaine colorée représentée par le cotylédon hypogé, engainant, à bout vert, et par la pre-

(¹) *Loc. cit.*, p. 294, et *Bull. du Muséum*, 2ᵉ série, 3, 1931, p. 177.

mière feuille en forme de gaine foliacée, feuilles adultes reproduites exactement dans leur limbe et leur base engainante par la deuxième feuille de la plantule.

En résumé, chez les Liliiflores, le développement de la plantule offre des analogies étroites avec le développement des pièces foliaires adultes. Dans la plantule, le cotylédon et les feuilles suivantes présentent, par des dispositifs variés, un tableau raccourci du cycle annuel des feuilles de l'adulte qui y sont esquissées dans leur forme et leurs dimensions relatives. Pour chaque tribu, on peut prévoir la forme de la plantule d'après la composition du cycle foliaire adulte, et réciproquement. D'autre part des recherches comme celles de M. Augem sur les *Iris* [1], et les études que je poursuis sur les Liliacées, permettent de s'assurer que les matériaux de réserve utilisés, soit par les gemmules, soit par les bourgeons, sont de nature chimique différente. Cette considération rend encore plus remarquable l'existence des parallélismes de croissance que j'ai observés.

ZOOLOGIE. — *Sur l'existence de deux espèces de* Trichoniscus *du sous-genre* Spiloniscus (*Crustacés; Isopodes*) *jusqu'ici confondues et sur leurs rapports réciproques*. Note de M. **A. Vandel**, présentée par M. M. Caullery.

J'ai montré antérieurement qu'il existe deux races de *Trichoniscus* (*Spiloniscus*) *provisorius*, l'une sexuée, l'autre parthénogénétique. Les recherches que je poursuis sur l'origine de la forme parthénogénétique m'ont conduit à reconnaître que j'avais confondu sous le nom de *Trichoniscus* (*Spiloniscus*) *provisorius*, deux espèces bien distinctes.

Caractères morphologiques. — Le caractère qui permet de distinguer ces deux espèces réside dans la forme de l'exopodite du premier pléopode du mâle. Dans l'une des espèces, le bord externe de l'exopodite est nettement concave, et se renfle, à sa base, en une bosse caractéristique (*fig*. A). Dans l'autre espèce, le bord externe de l'exopodite est droit, et s'infléchit, à sa base, en un angle à peine saillant (*ffi*. B). Il n'existe pas — comme il est de règle chez les *Trichoniscus* — de différences appréciables entre les femelles de ces deux espèces, et il est impossible de les distinguer morphologiquement.

Nomenclature. — La première espèce (*fig*. A) correspond au *Tr*. (*Spiloniscus*) *provisorius* Racovitza 1908, et c'est à cette espèce ainsi caractérisée

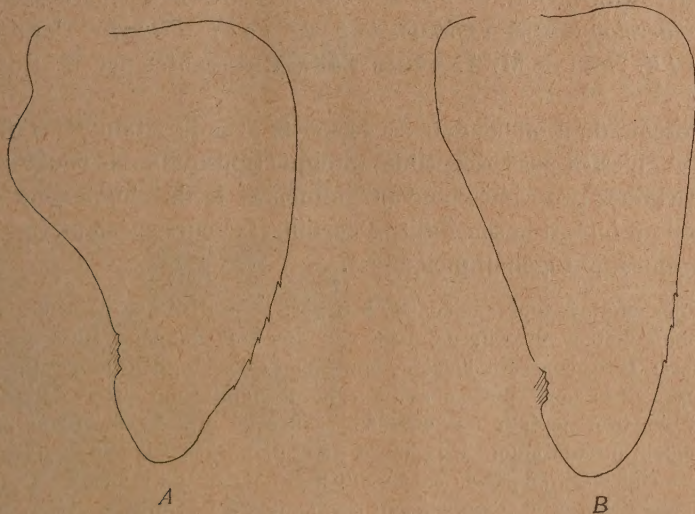
---

(1) A. Augem, *Les glucides des Iris* (*Nature, genèse, transformation*) (*Rev. gén. de Bot.*, **40**, 1928, p. 456 et suiv.).

qu'il convient de restreindre cette appellation. Par la forme de l'exopodite du premier pléopode mâle, elle se rattache à *biformatus* Racovitza et à *noricus* Verhœff (= ? *verhœffi* Dahl).

La seconde espèce (*fig.* B) correspond à *Tr. elisabethæ* Herold 1923. *Tr. rhenanus* Graeve est une espèce très voisine, sinon identique.

Caractères cytologiques. — Le nombre de chromosomes est le même dans les deux espèces : $n = 8$; $2n = 16$.



Essais de croisements entre les deux espèces. — Le croisement de ces deux espèces est impossible. J'ai tenté 106 essais de croisement ; ils ont tous donné des résultats négatifs. Les individus d'espèce différente n'exécutent aucune tentative d'accouplement, car, à la dissection, les spermathèques des femelles se montrent toujours vides. Le critère du croisement confirme et renforce les données morphologiques : *provisorius* et *elisabethae* constituent deux espèces distinctes.

Distribution géographique. — *Tr. provisorius* est une espèce largement répandue dans le midi et l'ouest de la France : Pyrénées, bassin de l'Aquitaine, Normandie. Elle existe aussi en certains points de l'est de la France : Nancy, Varces (Isère), La Grave (Hautes-Alpes). Enfin cette espèce m'a été envoyée d'Angleterre (Lancashire) et des environs de Gênes (Grotte de la Suja ; *provisorius* var. *sujensis* Brian 1926).

Tr. elisabethae n'avait été recueilli jusqu'ici que dans le nord de l'Allemagne, dans les pays baltes et en Suède. En France, cette espèce est sur-

tout répandue dans l'Est et dans les montagnes : Haute-Saône, Jura, Cévennes (Millau, Montpellier), Montagne Noire, Pyrénées centrales.

Les deux espèces peuvent, d'ailleurs, coexister dans la même région. C'est le cas dans les Pyrénées et sur le bord occidental de la Montagne Noire.

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *Action de l'eau de mer où a séjourné du carotène sur le développement expérimental de l'œuf d'Oursin* Paracentrotus lividus *LK*. Note de M. **J. André Thomas**, présentée par M. Roux.

Le carotène, dont on connaît les rapports avec la vitamine A ou la provitamine A, n'est-il pas susceptible, quoique liposoluble de conférer à l'eau de mer certaines propriétés pouvant influencer le développement de l'œuf d'Oursin dont on sait la sensibilité à certains facteurs spéciaux (actions oligodynamiques, mitogénétiques, etc.).

Le carotène employé que je dois à M. Javillier, et contrôlé au point de vue de son activité comme facteur A (point de fusion : 175° au bloc Maquenne, dose active $\frac{1}{300}$ de milligramme). Il fut conservé dans une atmosphère d'azote, dans de petites ampoules scellées jusqu'au moment de expériences. Il fut simplement utilisé de la façon suivante : 1^{mg} de carotène était mis dans 20^{cm^3} d'eau de mer fraîche, dans un tube à essais, pendant un minimum de 24 heures, à la lumière et à la température du laboratoire; l'eau était alors passée sur un filtre en papier qui retenait les cristaux de carotène, restés rouges et apparemment semblables à eux-mêmes. De l'eau de mer conservée et filtrée dans les mêmes conditions, servait aux expériences de contrôle. Toutes les expériences furent faites dans de petites boîtes de Pétri couvertes où l'on mettait successivement et exactement 6^{cm^3} de la solution à étudier et XII gouttes d'une suspension homogène d'œufs dans de l'eau de mer fraîche. La fécondation était opérée ensuite avec une trace de sperme. J'ai fait 10 séries d'expériences comprenant chacune en moyenne, 5 expériences particulières variées, toujours en présence de témoins.

1° *Action sur le développement expérimental.* — Les stades du développement de l'œuf paraissent dans l'ensemble, relativement peu modifiés, comme si les gamètes qui viennent d'être plongés dans les solutions n'avaient pas encore eu le temps d'en ressentir les effets. Cependant quand les solutions sont suffisamment actives, la membrane de fécondation peut ne pas apparaître. Mais, souvent dès le stade IV, la symétrie et le rythme des divisions sont profondément bouleversés et aboutissent à la formation de blastomères inégaux quelquefois en nombre impair avec formation fréquente de véritables micromères. Lors de la division cellulaire les sillons

restent longtemps à l'état d'ébauches superficielles, ne creusant pas le cytoplasme ; de ce fait les nouvelles cellules s'isolent mal ou poussent d'une façon désordonnée, ce qui donne des morula monstrueuses. De plus, un curieux phénomène d'agglutination progressive des larves peut se manifester parfois dès le stade II et durer jusqu'à la gastrulation. D'une façon générale, les larves traitées ont, surtout dans les premiers stades, un certain retard sur les témoins. La gastrulation se produit néanmoins, mais dès son apparition le mésenchyme est électivement excité dans sa croissance. Il envahit bientôt toute la larve qui est opaque, a un aspect massif, nage faiblement ou reste immobile. Finalement, alors que les témoins (*fig.* 2) sont des Plutei normaux ou subnormaux (il y a toujours un certain pourcentage de larves aberrantes, l'eau ayant été conservée 24 heures ou plus), les lots traités (*fig.* 1) ne renferment que des larves arrondies dont

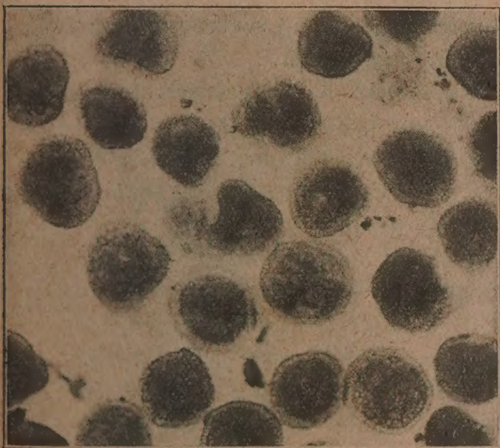




Fig. 1. Fig. 2.

Larves après 40 heures environ de développement, fixées dans le formol à 10 °/₀ dans l'eau de mer.
Fig. 1. — Larves traitées. Fig. 2. — Témoins normaux ou subnormaux.

quelques-unes seulement ont une vague indication de la forme tétraédrique. Elles sont en général dépourvues de squelette et sont complètement remplies d'un mésenchyme extrêmement abondant. Elles sont du reste lysées rapidement. L'étude histologique du mésenchyme de ces équivalents de Plutei montre de grosses cellules, souvent géantes, avec un gros noyau arrondi, à caryosomes très chromophiles.

2° *Action sur les gamètes.* — Les œufs d'Oursin, plongés au moins une

demi-heure dans de l'eau de mer où a séjourné du carotène, comme il a été dit, puis remis dans de l'eau de mer normale et fécondés, présentent des altérations voisines de celles qui viennent d'être décrites. De même le traitement préalable du sperme peut altérer le développement dans une certaine mesure, ou le fait de traiter les larves seulement une demi-heure après la fécondation dans de l'eau normale.

D'autre part, un traitement de plus de 20 heures des œufs vierges ne détermine aucune activation parthénogénétique, la fécondation pouvant encore s'effectuer. Par contre, un traitement de 45 minutes environ tue le sperme concentré. On tue de même les spermatozoïdes en 15 minutes environ, si l'on plonge un cristal de carotène dans I goutte de sperme concentré.

J'ajouterai que ces solutions présentent encore une certaine activité, si on les dilue de moitié et même quelquefois au tiers avec de l'eau de mer normale, et que les mêmes cristaux de carotène peuvent servir à quelques expériences consécutives, l'action s'atténuant légèrement.

Enfin dans les cas où les œufs ont spontanément de mauvais développements (comme cela arrive chaque année en août à Roscoff), les larves traitées sont nettement plus résistantes que les larves témoins, comme s'il y avait là une action trophique. Magrou et Mme Magrou ont déjà signalé un fait analogue à propos des actions mitogénétiques [1].

Le carotène employé, quoique théoriquement insoluble dans l'eau, communique donc à l'eau de mer des propriétés qui se manifestent nettement par une altération du développement expérimental de l'œuf d'Oursin, spécialement par une excitation de la croissance du mésenchyme. L'explication d'un tel phénomène peut suggérer plusieurs hypothèses; il semble, au moins provisoirement, qu'on puisse penser soit à une impureté organique, soit à une substance dissoute à partir du carotène et agissant à l'état de traces sur les œufs en développement.

A 15^{h}55^m l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16^{h}10^m.

A. Lx.

---

(1) *Comptes rendus*, **191**, 1930, p. 963-965.